

Geschichtliches.

Thureau-Dangin, F.: La mesure des volumes d'après une tablette inédite du British Museum. Rev. Assyriol. 32, 1—28 (1935).

Herausgabe und Bearbeitung eines neuen mathematischen Keilschrifttextes (BM 85196). Inhaltlich steht er den in CT IX publizierten Texten sehr nahe. Er behandelt hauptsächlich bautechnisch eingekleidete Volumberechnungen (meist mittels einfacher Näherungen). Beim letzten Beispiel handelt es sich um eine Transformation auf eine Normalform, sowohl durch Einführung neuer Unbekannter als neuer Koeffizienten.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Bortolotti, Ettore: Il calcolo del volume del troncò di piramide e della superficie della sfera nel „Papiro Matematico di Mosca“. Period. Mat., IV. s. 15, 87—92 (1935).

● **Rey, Abel:** Les mathématiques en Grèce au milieu du V^e siècle. (Actualités scient. et industr. Nr. 217. Exposés d'histoire et philosophie des sciences. Publiés par Abel Rey. I.) Paris: Hermann & Cie. 1935. 92 pag. et 8 fig. Frs. 18.—

Verf. gibt eine Entwicklungsgeschichte der wichtigsten mathem. Ideen in der vor- und frühgriechischen Zeit. Die ausgezeichnete Lesbarkeit dieser Darstellung beruht nicht nur auf dem guten Stil des Verf., sondern auch auf der Nichtexistenz ausführlicherer Quellen für die erste Periode der griech. Math. Komplikationen, die sich bei der vorgriechischen Math. ergeben könnten, überwindet Verf. durch eine praktisch vollständige Ignorierung der babyl. Mathem. An einer Stelle (S. 43), an der er auf babyl. Tatsachenmaterial eingeht, bezeichnet er in einem Gleichungssystem von 3 Gleichungen für 3 Unbekannte 2 dieser Gleichungen als die Lösungen.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Brun, Viggo: Oberfläche und Volumen der Kugel. Eine Variation des Archimedischen Verfahrens. Norsk mat. Tidsskr. 17, 1—13 (1935) [Norwegisch].

Im ersten Teil der Arbeit referiert Verf. über die Frage der Oberflächenberechnung im Moskauer Math. Papyrus. Im zweiten Teil wird eine sehr anschauliche Herleitung der Relationen zwischen Kugel und Zylinder, abweichend von der Archimedischen, gegeben. Während Archimedes die Kugel durch eine Rotationsfläche umgibt (deren Meridian ein reguläres $2n$ -Eck ist), umschreibt Verf. der Kugel eine geeignete Polyederfläche und ersetzt auch den Zylinder durch eine prismatische Oberfläche, die mit dem Polyeder einen Äquatorgürtel von Quadraten gemein hat, während die darüber und darunter liegenden Rechtecke durch „Projektion“ der einzelnen Polyederflächen von der Achse aus entstehen. Man kann dann leicht sehen, daß die so entstehenden Rechtecke auf dem Prisma flächengleich sind mit den zugeordneten Trapezen auf dem Polyeder und ebenso, daß sich die entsprechenden Volumina verhalten wie 3 : 2, woraus sich die Archimedischen Sätze unmittelbar durch Grenzübergang ergeben.

O. Neugebauer.

Smith, David Eugene: Euclid, Omar Khayyâm, and Saccheri. Scripta Math. 3, 5—10 (1935).

Verf. hat in Teheran ein Manuskript entdeckt, das einen Kommentar von Nasir ed-din zu Omar Khayyâm's Kommentar zu Euklid I enthält. Dieser vorläufige Bericht betrifft das Parallelenaxiom, und es erweist sich, daß in gewissem Sinne Saccheri von Khayyâm abhängt.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Emch, Arnold F.: The Logica demonstrativa of Girolamo Saccheri. II. Scripta Math. 3, 143—152 (1935).

I. s. dies. Zbl. 10, 386.

Marcolongio, R.: Arte e scienza di Leonardo da Vinci. Riv. Fis. Mat. Sci. Nat. 9, 281—298 (1935).

Langer, Rudolph E.: The life of Léonard Euler. Scripta Math. 3, 61—66 u. 131 bis 138 (1935).

Tambs Lyche, R.: Die Stellung der Mathematik in Norwegen in den Jahren um 1780 beleuchtet durch D. C. Festers Wirksamkeit in Trondheim. Norske Vid. Selsk., Forh. 7 26*—33* (1935) [Norwegisch].

Jelitai, Joseph: Le mathématicien hongrois Paul Sipos. Archeion 16, 298—300 (1934).

Lorey, Wilhelm: Friedrich Ludwig Wachter (1792—1817), ein Schüler von Gauss. Archeion 16, 307—315 (1934).

Hayashi, Tsuruichi: On the mathematicians in the four districts Hitachi, Shimozuke, Kozuke and Shinano. Tôhoku Math. J. 40, 490—522 (1935) [Japanisch].

Algebra und Zahlentheorie.

Bays, S., et E. de Weck: Sur les systèmes de quadruples. Comment. math. helv. 7 222—241 (1935).

Verff. untersuchen Vierersysteme Δ_N^4 , die aus N Elementen zu je vieren analogen Steinerischen Tripelsystemen gebildet werden, dabei muß N von der Form $6n \pm 1$ sein. Nachdem einige einfache Sätze über das Verhältnis eines Δ_{N-1}^{n-1} zu einem Δ_N^n bewiesen sind, geben Verff. drei Konstruktionsmethoden für Vierersysteme. Die erste liefert aus einem Δ_N^4 ein Δ_{2N}^4 und ist im Falle $N = 2N'$ anwendbar. Sie beruht darauf, daß man N Elemente nach einer Methode von Reiss zu Paaren anordnet und diese mit den Paaren eines gleich gebildeten Systems passend kombiniert. Für $N=8$ erhält man auf diese Weise ein einziges Δ_8^4 . Die Begründung der beiden anderen Konstruktionsverfahren steht noch aus, sie beruhen ebenfalls auf einer Rekursion und liefern aus einem Δ_N^4 und einem Δ_{N-4}^4 ein Δ_{2N-6}^4 bzw. aus einem Δ_{N-2}^4 ein Δ_{2N-6}^4 und werden an den Fällen $N=10$ und $N=14$ illustriert. *J. J. Burckhardt* (Zürich).

Schiefner, L. M.: On the m -th power of a matrix. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 59* bis 600 u. engl. Text 600—601 (1935) [Russisch].

Aufstellung des interessanten allgemeinen Ausdrucks für das Element der m -ten Potenz einer Matrix, $m > 0$ ganz — ohne Benutzung von Elementarteilern, wie ihre Lappo-Danilewskij (vgl. dies. Zbl. 9, 350) für allgemeines m bedarf — sowie Ankündigung des Erscheinens der ausführlichen Herleitung. *Th. Motzkin* (Jerusalem).

Harris, Lawrence: The theory of linear matrix transformations with application to the theory of linear matrix equations. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 13, 399—420 (1934).

An elementary treatment of matrices whose elements are matrices. *MacDuffee*.

Tognetti, M.: Sulle matrici permutabili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21 149—156 (1935).

If A is an $n \times n$ matrix with complex elements, there exists a finite number of matrices C_1, C_2, \dots, C_k such that $A = \varphi(C_1) = \varphi(C_2) = \dots = \varphi(C_k)$ and such that every matrix B commutative with A is of the form

$$B = f_1(C_1) + f_2(C_2) + \dots + f_k(C_k)$$

where φ and the f 's denote rational functions.

MacDuffee (Madison).

Williamson, J.: The simultaneous reduction of two matrices to triangle form. Amer. J. Math. 57, 281—293 (1935).

Let A be a square matrix of order n with complex elements, and let $A - \lambda I$ have the elementary divisors $(\lambda - \lambda_i)^{e_i}$, $i = 1, 2, \dots, t$. If A is not derogatory, and B is any matrix, a sufficient condition that there exist a non-singular matrix W such that $W^{-1}AW$ and $W^{-1}BW$ are triangular is that every matrix

$$(A - \lambda_1 E)^{r_1} (A - \lambda_2 E)^{r_2} \dots (A - \lambda_t E)^{r_t} (AB - BA) \quad r_i = 0, 1, \dots, e_i$$

be nilpotent. If A is not derogatory, and if B has the latent roots μ_i , this same condition is both necessary and sufficient that the latent roots of $f(A, B)$ be $f(\lambda_i, \mu_i)$ for every polynomial f .

MacDuffee (Madison).

Williamson, John: A polar representation of singular matrices. *Bull. Amer. Math. Soc.* 41, 118—123 (1935).

An $m \times n$ matrix A , $m \leq n$, of rank r can be represented $A = (P_1 O_{m,n-m}) U_1$ where P_1 is positive hermitian of order m and rank r and U_1 is unitary of order n . P_1 is unique, while $U_1 = U Z_1$ where U is a fixed unitary matrix and Z_1 is one of a group simply isomorphic with the group of all unitary matrices of order $n - r$. The Z_1 are the unitary matrices satisfying $A Z_1 = A$. If $m \geq n$, a similar result holds. For $m = n$, $A = P_1 U_1 = U_2 P_2$ where U_1 and U_2 range over the same set. *MacDuffee*.

König, Karl: Über Vektormatrizen. II. *Mitt. math. Ges. Hamburg* 7, 253—258 (1935).

§ 1. Der Quaternionenring und seine Erweiterung zum alternativen Ring der Vektormatrizen. Der Hauptsache nach eine Zusammenfassung der Ergebnisse des Aufsatzes im selben Band S. 232—237 (dies. Zbl. 8, 385). Für die Einsquaternion, die auch für die Vektormatrizen die Stellung der Eins einnimmt, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, wird die Bezeichnung **1** eingeführt. — § 2. Die Norm einer Vektormatrix. Die Norm von $v = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix}$, $N(v) = \alpha\beta + a \cdot b$ läßt sich als die Determinante der Vektormatrix auffassen, wenn $-a \cdot b$ als Nebendiagonalglied genommen wird. Das zu v inverse Element $v^{-1} = \frac{1}{N(v)} \begin{pmatrix} \beta & -a \\ -b & \alpha \end{pmatrix}$ für das $vv^{-1} = v^{-1}v = 1$ ist, existiert für $N(v) \neq 0$. Ist $N(v) = 0$, so lassen sich die Lösungen von $xv = vx =$ dem Nullquaternion $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ angeben. — § 3. Vektormatrizen und gewöhnliche zweireihige Matrizen. Zwischen $\begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \alpha & ae \\ -be & \beta \end{pmatrix}$ (e Einheitsvektor) besteht ein Isomorphismus. Die Vektormatrizen können nach einem Parameter differenziert werden. — § 4. Die Cayleyzahlen. Es sind dies die Matrizen $\begin{pmatrix} \alpha & a \\ a & \alpha \end{pmatrix}$, wo α die Bildung der konjugiert-komplexen Zahl bedeutet. Das System dieser Matrizen hat 8 Einheiten. — § 5. Die alternative Erweiterung der Quaternionen. Es handelt sich um Ausdrücke $V = v + v'j_1 + v''j_2 + v'''j_3$, wo j_1, j_2, j_3 die nichtreellen Einheiten eines gewissen, von Combebiac aufgestellten, höheren komplexen Systems, v, v', v'', v''' gewöhnliche komplexe Vektorenmatrizen sind. *L. Schrutka* (Wien).

Ważewski, T.: Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues. *Compositio Math.* 2, 63—68 (1935).

Let $T = (t_1, \dots, t_p)$ be a variable point of a set E in cartesian p -space. Let $\|a_{\lambda\nu}(T)\|$, ($\lambda = 1, 2, \dots, l$; $\nu = 1, 2, \dots, n$), be of rank l for every T , the $a_{\lambda\nu}(T)$ being continuous in E . The problem considered is the existence of functions $b_{\mu\nu}(T)$ continuous in E such that
$$\sum_{\nu} a_{\lambda\nu}(T) b_{\mu\nu}(T) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l; \mu = 1, 2, \dots, n - l)$$

and such that the matrix $\|b_{\mu\nu}(T)\|$ is of rank $n - l$ at every point of E . An example shows that the $b_{\mu\nu}$ do not always exist. It is shown that they do exist if E is a parallelo-piped P , open or closed. Moreover, if there is a solution on one face of P , it can be continued over P . *MacDuffee* (Madison).

Duncan, W. J., and A. R. Collar: Matrices applied to the motions of damped systems. *Philos. Mag.*, VII. s. 19, 197—219 (1935).

This paper extends the method of a previous paper (this Zbl. 9, 147) to damped mechanical vibrating systems. The roots of the algebraic equation which furnishes the vibration frequencies are no longer necessarily real and the problem of the present paper is essentially that of determining, approximately, the complex zeros of maximum modulus of a given polynomial. The method used is that of Graefe, the matrix involved being raised to such a high power that the corresponding powers of the moduli of all the zeros involved, save the two zeros having the greatest modulus, may be neglected in comparison with the like powers of these latter. An illustrative example consisting of a system with three degrees of freedom is worked out. It is assumed throughout that there are no repeated roots. *Murnaghan* (Baltimore).

Amato, Vincenzo: Equazioni aventi per gruppo di Galois un sottogruppo fondamentale del gruppo totale. Mem. Accad. Ital. **6**, 635—642 (1935).

Verf. betrachtet Gleichungen, deren Galoissche Gruppe Normalisator einer Permutation S ist. Solche Gruppen nennt er Fundamentalgruppen und bezeichnet sie mit G_S (vgl. seine frühere Arbeit, dies. Zbl. **9**, 49). Soll die Gleichung irreduzibel sein, so muß S offenbar eine reguläre Permutation sein. Besteht sie aus q Zyklen vom Grade r ($qr = n$ ist der Grad der Gleichung), so ist G_S imprimitiv, und zwar bildet sie q Imprimitivitätssysteme. — Sind p, q, \dots Primteiler von q , so bezeichnet der Verf. mit S_1, S_2, \dots Permutationen, die den Gleichungen $S_1^p = S, S_2^q = S_1, \dots$ genügen. Die Kette $G_S, G_{S_1}, G_{S_2}, \dots, G_{S_r}, 1$, von der jedes Glied im vorangehenden enthalten ist, nennt der Verf. „serie principale“. G_S ist eine zyklische Gruppe von der Ordnung n .

Die Ordnungen dieser Gruppen sind bzw. $q! r^e, q_1! r_1^e, q_2! r_2^e, \dots$, wobei $\frac{q_i}{q_{i+1}}$ ein Primteiler von q_i und $r_{i+1} = \frac{q_i}{q_{i+1}} \cdot r_i$ ist. Dann betrachtet der Verf. sukzessive Resolventen, deren Adjunktion zum Rationalitätsbereich die Galoissche Gruppe auf $G_S, G_{S_1}, G_{S_2}, \dots, G_{S_r}, 1$ herabsetzt. N. Tschebotarow (Kasan).

Dorwart, H. L.: Concerning certain reducible polynomials. Duke math. J. **1**, 700 bis 73 (1935).

In einer Arbeit vom Verf. und O. Ore (dies. Zbl. **6**, 4) wurde bewiesen, daß jedes Polynom von der Form $f(x) = a(x - a_1) \dots (x - a_n) \pm p$ für $n > 6$ irreduzibel ist, wenn n ungerade ist, und höchstens in zwei irreduzible Faktoren vom Grade $\frac{n}{2}$ zerfällt, wenn n gerade ist. — Verf. zeigt, daß dieses Polynom dann und nur dann reduzibel ist, wenn für $n = 2m, m > 8$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\sqrt{a}(a_i - a_1) \dots (a_i - a_m) = |p \pm 1|. \quad (i = m + 1, \dots, n)$$

Daraus leitet der Verf. ab, daß die Auffindung sämtlicher reduzibler Polynome vom diesem Typ auf das Problem der ganzzahligen Lösung des Systems $\sum_{i=1}^m a_i^k = \sum_{j=m+1}^n a_j^k$ ($k = 1, 2, \dots, m - 1$) zurückgeführt werden kann. N. Tschebotarow (Kasan).

Petterson, Erik L.: Über einen Satz von Ö. Ore. J. reine angew. Math. **172**, 217 bis 218 (1935).

The author proves by elementary means the following generalization of a theorem of Ore (Skr. norske Vid.-Akad., Oslo 1923) and extensions. The degree r of a prime function (mod p) dividing $f(x) = g(x)^{p^e} - g(x) + a$, where $(a, p) = 1, p^e | t$ is of the form $r = i p^{e+1}$. Engström (New Haven).

Zehlein, Friedrich: Irreduzibilitätsproblem bei ganzzahligen Potenzreihen. Erlangen: Diss. 1933. 35 S. u. S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen **65/66**, 1—34 (1935).

The factorization of a power series with integral coefficients was reduced by W. Krull (this Zbl. **1**, 53) to the factorization of certain power series with p -adic coefficients which series may in turn be replaced by associated "normal form polynomials" by multiplication with a unit series. The irreducibility or reducibility of these polynomials may be tested in a finite number of steps by Hensel's method. However, if the series is given, Hensel's test requires at least the calculation of the δ approximation of the polynomial modulo $(p^{\delta+1})$ where δ is the order of its discriminant. The author gives a method whereby this calculation may be performed in a finite number of steps. In case the discriminant of the polynomial is zero the author shows that the series is a power of a prime series. The theorem that the Newton polygon of the polynomial may be obtained directly from the series leads to both a variety of criteria involving less calculation than the general method above and information in special cases of help, if the general method is necessary. There is given a method for obtaining the prime factors to a certain degree with a number of steps having a predictable bound.

Raudenbush (New Haven).

Skolem, Th.: Lösung gewisser Gleichungen in ganzen algebraischen Zahlen insbesondere in Einheiten. Skr. norske Vid.-Akad., Oslo Nr 10, 1—19 (1935).

This paper contains theorems on the solution in the ring R of all algebraic integers of algebraic equations with coefficients in R , and their solution in units ε_i . The author establishes by induction the condition for solution in R of a linear system. He shows by direct consideration of $N(a_i x + b_i) = 1$ that if $(a_i, b_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, there exists a unit x such that $a_i x + b_i = \varepsilon_i$. This result is applied to $f(x) = \varepsilon$ by factoring. If $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ then $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ has a solution in units if and only if the coefficients taken $n-1$ at a time have the G. C. D. 1. The equation $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = ay$ has a solution in units x_1, x_2, \dots, x_m, y if and only if the linear equation obtained by replacing all power products by separate variables has a solution in units.

Engström (New Haven).

● **Krull, W.: Idealtheorie.** (Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Hrsg. v. d. Schriftleitung d. Zbl. f. Math. Bd. 4, H. 3.) Berlin: Julius Springer 1935. VII, 152 S. RM. 17.50.

Cet Ouvrage apporte une intéressante vue d'ensemble sur le développement si important de la théorie des idéaux. L'Auteur se limite en principe au cas commutatif, mais sans passer sous silence toute allusion utile à l'Algèbre non commutative. Il distingue, pour classer les matières, la théorie additive et la théorie multiplicative des idéaux, distinction essentielle et qui correspond à la double origine de la théorie. L'origine de la théorie additive semble bien être la découverte faite par Lasker (1905) de la décomposition des idéaux en idéaux primaires dans les anneaux de polynômes. L'étude générale et axiomatique de la décomposition dans un anneau quelconque des idéaux (envisagés comme groupes abéliens par rapport à l'addition admettant l'anneau comme système d'opérateurs) fait l'objet des deux premiers chapitres (§ 1 Grundlagen und Ausgangspunkte, § 2 Abstrakte additive Idealtheorie). Le cas des idéaux de polynômes est traité spécialement dans un troisième chapitre, en raison des nombreux problèmes que pose l'application à la Géométrie algébrique. Le chapitre suivant, qui présente déjà des points communs avec la théorie multiplicative, est consacré aux „einkürbare Bereiche“. Enfin, avec les deux derniers chapitres (§ 5 Bewertungstheorie, § 6 V -Ideale, 4 -Ideale. Verhalten der Primideale bei Ringerweiterungen), on arrive à la théorie multiplicative des idéaux (problèmes de divisibilité) dont l'origine remonte à Dedekind. L'Auteur a fait un heureux effort pour unifier la terminologie et les notations; il adopte, comme les plus aisées, celles des ensembles et des groupes. A défaut des démonstrations complètes, qui n'ont pu trouver place, la marche des idées est constamment et clairement indiquée. Avec la bibliographie étendue, cet ouvrage constituera un guide précieux, sinon pour les débutants, tout au moins pour les mathématiciens déjà un peu familiarisés avec l'Algèbre abstraite et qui désirent approfondir la théorie des idéaux.

P. Dubreil (Nancy).

Tannaka, Tadao: Einige Bemerkungen zu den Arbeiten über den allgemeinen Hauptidealsatz. Jap. J. Math. 10, 163—167 (1933).

Verf. beweist den allgemeinen Hauptidealsatz: Im Strahlklassenkörper K mod \mathfrak{f} fallen alle Ideale des Grundkörpers k in den Strahl mod $\mathfrak{f}(K/k)$ [Iyanaga, Jap. J. Math. 7 (1931); dies. Zbl. 2, 121, und Herbrand, Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9 (1932); dies. Zbl. 3, 294] aufs Neue. Außerdem berichtigt er eine irrthümliche Schlußweise in einem Teil des Iyanagaschen Führersatzes und Herbrandschen Lemmas, die er durch ein Gegenbeispiel feststellt. Verf. folgert den Hauptidealsatz aus der folgenden Verallgemeinerung eines Satzes von Hasse [J. reine angew. Math. 162 (1930)]: Ist K/k ein Abelscher Körper, k' ein Zwischenkörper, so gilt: aus $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k) > \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(k'/k)$ folgt $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k) = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}(k'/k) \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k')$, aus $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k) = \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(k'/k)$ folgt $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k) \equiv \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}(k'/k) \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k')$.

Taussky (Bryn Mawr, Pa.).

Hasse, Helmut: Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10, 325—348 (1934).

Ein elliptischer Funktionenkörper K über dem Konstantenkörper k (Charakteristik $\neq 2$) mit einem Primdivisor \mathfrak{D} ersten Grades kann stets auf die Weierstraßsche Normalform $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ transformiert werden (für Charakteristik 3 in etwas abgeänderter Form), so daß $\tau = (x, y)$ die Nenner ($\mathfrak{D}^2, \mathfrak{D}^3$) hat. Dabei ist $4 = g_2^2 - 27 g_3^2 \neq 0$. Durch die Invariante $J = g_2^3/\Delta$ und einen gewissen Charakter ε ist K/k bis auf Isomorphie festgelegt. — Grundlegend für die Arbeit ist das Studium

isomorpher Abbildungen μ von K/k auf einen Teil $\mu K/k$ von sich: Meromorphismen. Durch μ möge eine Funktion z in μz übergehen. μv werde durch $(\mu v)z = \mu(vz)$ erklärt. Es gilt $(K:\mu K)(K:vK) = (K:\mu vK)$. $x_i = (x_i, y_i)$ sei eine in K liegende Lösung der Gleichung $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$. $\mathfrak{P}x_i$ sei der Wert an der Stelle \mathfrak{P} ersten Grades. Wird der Primdivisor $\mu^{-1}(N_{K/\mu K}\mathfrak{P})$ kurz mit $\mathfrak{P}\mu$ bezeichnet, so gilt $(\mathfrak{P}\mu)v = \mathfrak{P}(\mu v)$ und $(\mathfrak{P}\mu)x_i = \mathfrak{P}(\mu x_i)$. — Das Additionstheorem für elliptische Funktionen lautet: Aus zwei Lösungen x_1, x_2 läßt sich durch eine gewisse rationale Operation eine neue Lösung $x_3 = x_1 + x_2$ herleiten. [Dies entspricht der Berechnung von $\wp(u+v)$ aus $\wp(u)$, $\wp'(u)$ und $\wp(v)$, $\wp'(v)$.]. Dabei gilt $dx_1/y_1 + dx_2/y_2 = dx_3/y_3$, ferner $\mathfrak{P}x_1 + \mathfrak{P}x_2 = \mathfrak{P}x_3$. Mit $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$ werde derjenige Primdivisor \mathfrak{P}_3 bezeichnet, der sich aus $\mathfrak{P}_1/\mathcal{O} \cdot \mathfrak{P}_2/\mathcal{O} \sim \mathfrak{P}_3/\mathcal{O}$ ergibt. Dann gilt der wichtige Klassensatz: $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_3$ ist mit $\mathfrak{P}_1x + \mathfrak{P}_2x = \mathfrak{P}_3x$ gleichwertig. — Die Summe $\mu + v$ von Meromorphismen werde durch $(\mu + v)x = \mu x + vx$ erklärt. Es folgt jetzt $\mathfrak{P}(\mu + v) = \mathfrak{P}\mu + \mathfrak{P}v$ und $\lambda(\mu + v) = \lambda\mu + \lambda v$. Um auch die Regel $(\mu + v)\lambda = \mu\lambda + v\lambda$ zu erhalten, muß man sich auf solche Meromorphismen μ beschränken, für welche $\mathfrak{P}\mu$ im Nenner von μx aufgeht; es gilt dann auch noch $(\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2)\mu = \mathfrak{P}_1\mu + \mathfrak{P}_2\mu$. Nach Hinzufügung eines uneigentlichen Meromorphismus 0 bilden die Meromorphismen einen Ring M , mit 1, ohne Nullteiler. 2 sei der Meromorphismus $1+1$, es ist $(K:2K) = 4$, daher ist 2 weder Null noch Einheit in M , also hat M die Charakteristik 0. Die einzigen Einheiten von M sind Automorphismen $x \rightarrow (\zeta^2 x, \zeta^3 y)$, wobei $\zeta^6 = 1$ gilt. Genügt daher μ einer absolut-algebraischen Gleichung, so enthält M den Ring $\langle \mu \rangle$ mit nur endlich vielen Einheiten, $\langle \mu \rangle$ läßt sich daher abstrakt in einen imaginär-quadratischen Zahlkörper einbetten. — Falls g_2, g_3 einen Körper aus q Elementen erzeugen, hat man den Meromorphismus $\pi x = (x^q, y^q)$. Es wird gezeigt, daß π der Gleichung $\varphi(\pi) = \pi^2 + (h - q - 1)\pi + q = 0$ genügt, wobei h die Klassenzahl von K ist. Nun ist $\varphi(q^2)$ bis auf einen unwesentlichen Faktor gerade die ζ -Funktion von K ; die Riemannsche Vermutung für $\zeta(s)$ folgt jetzt elementar aus der Tatsache, daß die Wurzeln von $\varphi(z)$ konjugiert komplex (und nicht reell verschieden) sind. — An weiteren Ergebnissen ist zu erwähnen: $(K:nK) = n^2$. Wenn k algebraisch abgeschlossen und n prim zur Charakteristik p ist, bilden die Divisorenklassen \mathcal{C} von K mit $\mathcal{C}^n = 1$ eine Abelsche Gruppe vom Typ (n, n) . Für $n = p^n$ tritt eine zyklische Gruppe der Ordnung p^n bzw. 1 auf. — Am Schluß der Arbeit findet sich eine Anwendung auf die Abschätzung der Anzahl viergliedriger Sequenzen von Resten und Nichtresten mod p .

Ernst Witt (Göttingen).

● Deuring, Max: Algebren. (Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Hrsg. v. d. Schriftleitung d. Zbl. f. Math. Bd. 4, H. 1.) Berlin: Julius Springer 1935. V, 143 S. RM. 16.60.

Dieser Bericht ist die erste vollständige Darstellung der modernen Theorie der hyperkomplexen Systeme, wie sie sich in den letzten 10 Jahren in algebraischer und arithmetischer Richtung entwickelt hat. Er enthält eine erstaunliche Fülle von Stoff und ist doch zugleich ein vollständiges Lehrbuch mit knappen, aber lückenlosen Beweisen. Der Charakter des Buchs ist vorwiegend arithmetisch: Die rein arithmetischen Kapitel (Ganze Größen; Algebren über Zahlkörpern, Zusammenhang mit der Arithmetik der Körper) nehmen etwas über die Hälfte ein; aber auch die algebraischen Teile — es handelt sich wesentlich um die von E. Noether entwickelten Methoden — haben gruppentheoretischen und arithmetischen Charakter. — Nach einem kurzen Überblick über die Grundlagen (I) werden in II die Wedderburnschen Sätze entwickelt, in der allgemeinsten bisher bekannten Fassung (Köthe). An Stelle der nilpotenten Ideale treten die nur aus nilpotenten Elementen bestehenden Nilideale; eine Endlichkeitsbedingung wird nur für den Restklassenring nach dem Radikal vorausgesetzt. Die hier gegebene Beweisaneordnung ist eine Kombination von Beweisen von Wedderburn, Artin und Noether; die Beweise sind bemerkenswert einfach, auch bei Beschränkung auf den Spezialfall der Algebren. III bringt die Noethersche Begründung der Darstellungstheorie. IV enthält die feinere Strukturuntersuchung der einfachen

Algebren (nichtkommutative Galoissche Theorie, Theorie der Zerfällungskörper), die in V mit der Theorie der Brauer-Noetherschen Faktorensysteme ihren Abschluß findet. Es folgen die beiden schon erwähnten arithmetischen Kapitel. Die Theorie der ganzen Größen hat in VI eine völlige Neubegründung erfahren, die eine starke Vereinfachung gegenüber der bisherigen Speiser-Brandt-Artinschen Begründung bedeutet. In VII werden nach dem Vorbild von Hasse die p -adischen Methoden zur Untersuchung der Algebren über Zahl- und Funktionenkörpern herangezogen. Daran schließen sich eine Reihe von Anwendungen der Algebrentheorie auf tiefliegende Fragen der Theorie der algebraischen Zahlkörper, insbesondere der Klassenkörpertheorie: Die hyperkomplexe Begründung der Normenresttheorie, der Hassesche Beweis des Artinschen Reziprozitätsgesetzes und die Noethersche Verallgemeinerung des Hauptgeschlechtssatzes.

E. Noether. B. L. van der Waerden.

Moisil, Gr. C.: Remarques sur quelques types d'algèbres non-associatives. Ann. Sci. Univ. Jassy 20, 10—32 (1935).

A sei eine nichtassoziative Algebra über dem Ring Γ . A heißt quasi-kommutativ, wenn $ab = \varrho_{a,b} ba$, quasi-jacobisch, wenn $a(bc) + \lambda_{abc} b(ca) + \mu_{abc} c(ab) = 0$, und quasi-assoziativ, wenn $(ab)c = \varrho_{abc} a(bc)$ und $a(bc) = \sigma_{abc} (ab)c$. Die Elemente $\varrho, \lambda, \mu, \sigma$ gehören zu Γ . Es werden zwei nichtassoziative Algebren, von denen die eine kommutativ und jacobisch, die andere quasi-kommutativ mit $\varrho_{a,b} = -1$ und quasi-jacobisch mit $\lambda_{abc} = \varepsilon$ und $\mu_{abc} = \varepsilon^2$, wo $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon \neq 1$, als Beispiele angegeben. Für den Fall, daß A eine Algebra über einem kommutativen Körper Γ ist, werden alle möglichen Jacobirelationen $\lambda a(bc) + \mu b(ca) + \nu c(ab) = 0$ mit konstanten λ, μ, ν berechnet. Für Algebren, die quasi-kommutativ und quasi-jacobisch sind, werden bewiesen: Die Kommutativität beim Multiplizieren von Idealen, die Idealungleichungen $a(bc) \leq b(ca) + c(ab)$ und $a^m a^n \leq a^{m+n}$ mit $a^n = a(a(\dots))$ und der Satz: Sind a und b Ideale, so bildet die Gesamtheit der Elemente q mit $qb \leq a$ ein Ideal $q = a : b$. q ist das größte Ideal mit $qb \leq a$. Weiter: Die Summe aller nilpotenten Ideale ist ein nilpotentes Ideal (Radikal). Ist m nilpotent und A mod. m halbeinfach, dann ist m das Radikal. Die Automorphismen von A werden untersucht. Bei Gültigkeit des V.K.S. für Moduln wird ein Kettensatz für Ideale hergeleitet. — Bei quasi-assoziativen Algebren wird das normale Produkt $a_1 \dots a_r = a_1(a_2(\dots a_r)\dots)$ erklärt. Jedes Produkt ist bis auf einen Faktor aus Γ gleich dem normalen Produkt seiner Faktoren. Die Multiplikation der Ideale ist assoziativ, und es ist $a^m a^n = a^{m+n}$. Gilt nur die erste Gleichung der Quasiassoziativität, so bilden die Elemente c mit $cb \leq a$ für alle $b \in b$ ein Linksideal c , falls a ein solches und b ein Modul ist. — Auf den Zusammenhang der Begriffe und Sätze mit der Lieschen Gruppentheorie wird hingewiesen.

Bruno Schoeneberg (Hamburg).

Scorza, Gaetano: Le algebre per ognuna delle quali la sotto-algebra eccezionale è potenziale. Atti Accad. Sci. Torino 70, 26—45 (1935).

Dans ce travail l'a. prouve d'abord que: Si B est une sous-algèbre invariante d'une algèbre A , il résulte $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$,

les systèmes B_i étant complémentaires dans B et signifiant respectivement les ensembles formés par les éléments de B qui — par rapport à un automodule u de A , arbitrairement fixé — ont: 1. un module; 2. un module gauche et un nullifique droit; 3. un nullifique gauche et un module droit; 4. un nullifique. De cette proposition, généralisant un théorème connu de B. Peirce [cf. p. ex. G. Scorza, Corpi numerici e algebre, 271 (Messina, Principato 1921)], découle la conséquence suivante (de laquelle l'a. donne aussi une démonstration directe): Si B est pseudonulle, potentielle et d'ordre > 1 , ses éléments — en u — ont tous un module ou ont tous un nullifique. — Comme application, enfin, l'a. prouve que: Si A est une algèbre ayant pour sous-algèbre exceptionnelle (propre ou impropre) une algèbre (pseudonulle) potentielle E d'ordre m , il est

$$A = A^{(1)} + A^{(2)},$$

où $A^{(1)}$ est zéro ou bien est une algèbre semi-simple avec module, et $A^{(2)}$ est une algèbre irréductible présentant un de ces quatre cas: 1. $A^{(2)}$ n'a pas de module et coïncide avec E ; 2. $A^{(2)}$ admet un module et est la somme de E et de l'algèbre engendrée par le module; 3. on a $m = 1$, et $A^{(2)}$ est une algèbre du 2-ème ordre avec une des tables de multiplication suivantes:

$$\begin{array}{c|c|c} u & v & \\ \hline u & u & v \\ \hline v & 0 & 0 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c} u & v & \\ \hline u & u & 0 \\ \hline v & v & 0 \end{array};$$

4. on a $m = 1$, et $A^{(2)}$ est une algèbre du 3-ème ordre dont la table de multiplication est:

$$\begin{array}{c|c|c|c} & u_1 & u_2 & v \\ \hline u_1 & u_1 & 0 & v \\ \hline u_2 & 0 & u_2 & 0 \\ \hline v & 0 & v & 0 \end{array}.$$

Beniamino Segre (Bologna).

Thébault, V.: Sur les nombres cycliques. *Gaz. mat.* **40**, 385—392 (1935).

Durch zyklische Vertauschung der Ziffern einer Zahl N entsteht ein Zyklus von Zahlen N, N_1, N_2, \dots . Durch Gebrauch der irreduziblen Brüche, die in ihren Dezimalbruchentwicklungen die Zahlen N, N_1, N_2, \dots zu Perioden haben, wird der Fall untersucht, daß N_1, N_2, \dots durch N teilbar ist.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Ducci, Enrico: La somma delle potenze di egual grado dei primi n numeri interi in funzione di quella delle loro prime potenze. *Boll. Un. Mat. Ital.* **14**, 87—91 (1935).

Entwickelt man die Glieder der Summe $s_m = \sum_{k=0}^{n-1} (x + ky)^m$ und setzt $\sum_{k=1}^{n-1} k^r =$ der Bernoullischen Funktion $S_r(n)$, so kann man die Formel $\frac{\partial s_m}{\partial n} = m y s_{m-1} + c_m$ ableiten, wo c_m ein homogenes Polynom in x und y bedeutet, das von n unabhängig ist. Diese Formel wird gebraucht, um die Koeffizienten der Entwicklung von $S_{2m}(n): S_2(n)$ und von $S_{2m+1}(n)$ nach Potenzen von $S_1(n)$ zu berechnen.

N. G. W. H. Beeger.

Lawther jr., H. P.: An application of number theory to the splicing of telephone cables. *Amer. Math. Monthly* **42**, 81—91 (1935).

In this paper the author considers the problem of splicing a cable having N conductors in a cylindrical layer in such a way as to minimize the interference of a conductor by its two adjacent conductors. The solution of the problem is made to depend on the theory of the binomial congruence. Numbering the conductors $0, 1, 2, \dots, N-1$, the problem is to assign a substitution splicing the conductor K of one cable to the conductor $SK \pmod{N}$ of the next cable so as to generate a cyclic group of maximum order. The problem is solved by choosing the integer S so that S^d is the least power of S congruent to $+1$ or -1 modulo N , where d is $\lambda(N)$ or $\lambda(N)/2$ according as $\lambda(N)$ is equal to or less than Euler's $\varphi(N)$, the λ -function being Lucas' least common multiple of the factors of $\varphi(N)$. Such an S exists for every N and is tabulated for $N < 140$.

D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.)

Gupta, Hansraj: A table of partitions. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. **39**, 142 bis 149 (1935).

This paper contains a table of $p(n)$, the number of unrestricted partitions of n , for $n \leq 300$. It was obtained as the first column of a double entry table of the number of those partitions of n in which the smallest element is m . The author considers also the more practical method for computing merely $p(n)$ by the celebrated recurrence of Euler:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \dots$$

involving the pentagonal numbers $\leq n$. The largest entry $p(300) = 9253082936723602$ is verified by a direct calculation by means of the remarkable asymptotic formula of Hardy-Ramanujan which is in error, in this case, by only .004 if 8 terms are taken.

Lehmer (Bethlehem, Pa.).

Chowla, Inder: Some problems of Waring's type. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **1**, 694—697 (1935).

$\varepsilon(k)$ is defined as the least value of $m+n$ for which there are an infinity of solutions of $x_1^k + \dots + x_m^k = y_1^k + \dots + y_n^k$ in positive integers, with $x_i \neq y_j$ ($i \leq m, j \leq n$); $\delta(k)$ is defined as the least value of $m+n$ such that there is an integer c for which there are (for any A) an infinity of solutions of $c = x_1^k + \dots + x_m^k - y_1^k - \dots - y_n^k$ with all $x, y > A$. The author proves that $\varepsilon(7) \leq 13$, $\delta(7) \leq 13$, $\varepsilon(9) \leq 17$, $\delta(9) \leq 17$. An outline of a proof that $\min(\varepsilon(k), \delta(k)) \leq 2k$ is given, but the reviewer is unable to see that the necessary formula (10) is obvious. *Davenport* (Cambridge).

Nagell, Trygve: *Zur Theorie der rationalen Punkte auf ebenen Kurven dritten Grades.* *Norske Vid. Selsk., Forh.* **7**, 140—142 (1935).

A method is given for determining whether there is a rational point on an elliptic cubic curve defined by an equation with rational coefficients. Choose a rational straight line cutting the curve in three real non-rational points, and let K be the cubic field generated by the coordinates of any one of these points. By a result of a previous paper [*Acta math.* **52** (1928)], the curve is "equivalent" in K to a curve of the form $Y^2 = 4X^3 - \gamma_2 X - \gamma_3$, γ_2, γ_3 being in K . The author's result is that there is a rational point on the given curve if and only if there exists a number α in K such that $\alpha^4 \gamma_2$ and $\alpha^6 \gamma_3$ are rational. Some points in the proof are not clear to the reviewer.

Davenport (Cambridge).

Nagell, Trygve: *Zur arithmetischen Theorie der ebenen Kurven dritten Grades.* *Norske Vid. Selsk., Forh.* **8**, 1—4 (1935).

Extension of the method of the previous paper to the problem of the existence of a point of Ω on an elliptic cubic curve with coefficients in any algebraic field Ω .

Davenport (Cambridge).

Analysis.

Turnbull, H. W.: An elementary derivation of the exponential limit and of Euler's constant. *Math. Notes* Nr **29**, XXI—XXIV (1935).

Boas jr., R. P.: A theorem on analytic functions of a real variable. *Bull. Amer. Math. Soc.* **41**, 233—236 (1935).

A real function $f(x)$ is analytic at x if its Taylor development about x converges to the function in some interval $(x-c, x+c)$, $c > 0$. A proof of a theorem of Pringsheim: If there exists a number $\delta > 0$ such that $\varrho(x)$, the radius of convergence of the Taylor expansion of $f(x)$ about x , is not less than δ , $a \leq x \leq b$, then $f(x)$ is analytic in (a, b) , is obtained by aid of the following theorem. If $\varrho(x) > 0$, $a \leq x \leq b$, the points at which $f(x)$ is not analytic form a nowhere dense closed set or a null set.

E. W. Chittenden (Iowa).

Punga, F.: *Zwei Determinantensätze.* *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* **45**, 49—53 (1935).

Bildet man von $n+1$ Funktionen f_1, f_2, \dots, f_{n+1} von x die Wronskische Determinante (der Name ist hier vermieden) $D = |f_1, f_2, \dots, f_{n+1}^{(n)}|$ und nennt die Unterdeterminanten zur letzten Zeile (die selbst Wronskische Determinanten sind) H_1, H_2, \dots, H_{n+1} , bildet man weiter von diesen Funktionen H abermals die Wronskische Determinante, so sind die Unterdeterminanten der letzten Zeile dieser Determinante wieder die Funktionen f_1, f_2, \dots, f_{n+1} , alle mit dem gemeinsamen Faktor $(-1)^n D^{n-1}$ multipliziert. — Sind f_1, f_2, \dots, f_{n+1} Funktionen der $n-1$ Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , und nennt man die n -reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & \dots & f_{n+1} \\ \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_1 & \dots & \partial f_{n+1} / \partial x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial f_1 / \partial x_{n-1} & \partial f_2 / \partial x_{n-1} & \dots & \partial f_{n+1} / \partial x_{n-1} \end{array}$$

G_1, G_2, \dots, G_{n+1} , so sind die n -reihigen Determinanten der in gleicher Weise aus den G aufgebauten Matrix den Funktionen f proportional. — Die Beweise werden mit Hilfe der Graßmannschen Ausdehnungslehre geführt. Als Anhang führt der Verf. Beweise an, die auf seine Bitte U. Wegner ohne die Ausdehnungslehre gegeben hat.

L. Schrutka (Wien).

Cotton, Émile: Sur certaines intégrales singulières. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1501—1503 (1935).

L'A. considère des intégrales simples ou multiples portant sur une fonction φ dépendant de paramètres, cette fonction devenant infinie (ou indéterminée) en un point isolé, lorsque les paramètres sont nuls. L'A. étudie ces intégrales pour des valeurs des paramètres voisines de zéro.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Cheo, Si-Ping: Singularities of analytic vector functions. Amer. J. Math. **57**, 294 bis 300 (1935).

A vector field Φ possessing continuous first order space derivatives throughout a region R is said to be analytic in R if $\text{div } \Phi = 0$, $\text{curl } \Phi = 0$. A simple example of an analytic vector field is the gradient of a harmonic point function; a second example is furnished by taking the curl of the vector $V(P) = \oint H ds'$ where H is a harmonic function of the vector $r = \vec{PP'}$ and ds' is the vector element of arc of a closed curve traced out by the point of integration P' . Analytic vector fields have singular points and singular curves and the terms point residue and curve residue are defined. A typical theorem is as follows: The curve residue of an analytic vector field of the second kind described above with respect to a certain singular curve in a certain region is constant.

Murnaghan (Baltimore).

Morinaga, Kakutarô: An extension of parallel displacement by matrices. J. Sci. Hiroshima Univ. A **4**, 127—140 (1934).

Das Schlesingersche Produktintegral

$$Y = \int_p^r (I + A(t) dt) Y^0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \exp \{ (t_k - t_{k-1}) A(\xi_{k+1}) \} Y^0$$

wird folgendermaßen entwickelt:

$$Y = \left\{ \exp \left(A(t) - \frac{d}{dt} \right) (r - p) \right\}_{t=r} Y^0$$

unter gewissen Voraussetzungen, welche die absolute Konvergenz der Reihe

$$\exp \left(A - \frac{d}{dt} \right) (r - p) = I + (r - p) \left(A - \frac{d}{dt} \right) + \frac{1}{2!} (r - p)^2 \left(A - \frac{d}{dt} \right)^2 + \dots$$

garantieren. Der Beweis, daß die Reihe, falls sie konvergiert, wirklich das Produktintegral darstellt, ist nicht überzeugend. Formel (4) der Arbeit ist unverständlich. — Als Anwendung wird erstens die bekannte Formel für die Änderung eines Vektors bei Parallelverschiebung auf einem geschlossenen, aus vier Bögen von Parameterkurven bestehenden, Wege bis auf Größen dritter Ordnung neu hergeleitet. Zweitens werden allgemeinere Parallelismen betrachtet, welche zunächst irgendwie von dem Wege und dessen Parameterdarstellung abhängen dürfen, und es werden die Bedingungen dafür aufgestellt, daß diese Parallelismen linear und von der Parameterdarstellung des Weges unabhängig sind.

van der Waerden (Leipzig).

MacColl, L. A.: A factorization theory for polynomials in x and in functions $e^{\alpha x}$. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 104—109 (1935).

The author considers the class C of functions of the form $f(x) = \sum_0^N \Phi_n(x) e^{\alpha_n x}$ where $N > 0$, $\Phi_n(x)$ are polynomials with no common root, and the α_n are distinct and ordered in such a way that when $n > m$ then either $\Re \alpha_m < \Re \alpha_n$ or, if $\Re \alpha_m = \Re \alpha_n$ then $\Im \alpha_m < \Im \alpha_n$. It is assumed that $\alpha_0 = 0$. The special case of $\Phi_n(x) = C_n = \text{const}$ was settled by Ritt [Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 584—596 (1927)]. A function $f(x) \in C$

is said to be divisible by $f_1(x) \in C$, if $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ where $f_2(x) \in C$. If $f(x) \in C$ is divisible only by itself and by the functions of the form $A c^{xx}$ then $f(x)$ is said to be irreducible. The author's main result is as follows. A function $f(x) \in C$ can be expressed in one and only one way as a product $f(x) = I_1(x) \dots I_m(x) S_1(x) \dots S_n(x)$ where each factor $\in C$, the I 's are irreducible, and the S 's are of the form $b_0 + \sum b_k \exp(\beta_k x)$ while the ratio of any two β 's in different functions is irrational. *J. D. Tamarkin.*

Sewell, W. E.: Degree of approximation by polynomials to continuous functions. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 111—117 (1935).

Die Funktion $F(x)$ sei regulär im Innern und stetig im abgeschlossenen Innern der analytischen Jordankurve C und erfülle auf C eine Lipschitzbedingung. Der n -te Abschnitt der zu $F(x)$ gehörigen Faberschen Entwicklung liefert dann eine Annäherung von der Genauigkeit $A \frac{\log n}{n}$, wobei A nur von $F(x)$ und C abhängt. Dieses Resultat kann auf Funktionen mit Hölderbedingung sowie auf analoge Bedingungen in bezug auf die Ableitungen ausgedehnt werden. *G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

McEwen, W. H.: Polynomials of best approximation associated with certain problems in two dimensions. Amer. J. Math. **57**, 367—381 (1935).

L'auteur étudie les deux problèmes suivants: A) Soit C une courbe algébrique fermée, dont l'équation est $c(x, y) = 0$, ($|x| \leq a$, $|y| \leq a$), et $u(x, y)$ une fonction continue avec ses dérivées partielles des deux premiers ordres dans la région J limitée par la courbe C et s'annulant sur C ; il s'agit de déterminer le polynôme $P_{m,n}(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ s'annulant sur C et rendant minima l'intégrale $\iint_J |V^2(u - P_{m,n})|^r dx dy$, où $V^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, et $r > 0$. Dans le cas, où $r > 1$, l'auteur démontre la convergence uniforme de $P_{m,n}$ vers u ainsi que celle de ses dérivées partielles des deux premiers ordres vers les dérivées respectives de u dans J . En général, (si $0 < r \leq 1$), l'auteur est obligé d'imposer des conditions beaucoup plus restrictives à $u(x, y)$ (existence et continuité des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $k = \left[\frac{4}{r}\right] + 1$) pour arriver à la même conclusion. B) La contour C (non nécessairement algébrique) étant donné, il s'agit de minimiser

$$\iint_J |V^2(u - P_{m,n})|^r dx dy + \lambda \max. \text{ sur } C |u(\alpha, \beta) - P_{m,n}(\alpha, \beta)|^s;$$

on obtient des conditions analogues aux précédentes pour la convergence uniforme. *S. Bernstein (Leningrad).*

Geronimus, J.: Sur un problème minimal. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. **10**, 69—74 (1934).

Consider the class of all polynomials $y(x) = \delta_0 x^n + \delta_1 x^{n-1} + \dots + \delta_n$ of degree $\leq n$, non-decreasing in each of the r non overlapping intervals (a_k, b_k) ($k = 1, 2, \dots, r$; $a_1 < b_r$), whose coefficients satisfy a given linear relation

$$\omega(y) \equiv \sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_i = a. \quad (2)$$

It is required to minimize the integral

$$L(y) = \int_{a_1}^{b_r} \varepsilon(x) s(x) y' dx, \quad (1)$$

where $s(x)$ is positive in (a_1, b_r) , and $\varepsilon(x) \equiv 1$ in each (a_k, b_k) and $\equiv 0$ in each (b_k, a_{k+1}) . Following the method of Tchebycheff (employed by Markoff and himself in similar problems), the author shows that the desired polynomial $y(x)$ may be represented as

$$y(x) = \int_{a_1}^x g(x) q(x) u^2(x) dx \quad [u(x) - \text{polynomial}],$$

with properly chosen $g(x)$ -polynomial of degree $\leq 2r$, and $q(x)$, both non-negative in (a_1, b_r) . Introducing the weight-function $p_1(x) = \varepsilon(x) s(x) g(x) \equiv \varepsilon(x) p(x)$, the problem is reduced to minimizing the integral $\int_{a_1}^{b_r} p_1(x) u^2(x) dx$, under the condition (1), and the solution is achieved in terms of the corresponding orthogonal polynomials $\varphi_n(x; a_1, b_r; p_1)$. In the special case of two intervals $(-b, -a)$, (a, b) with $\omega(y) \equiv \delta_0$, $s(-x) \equiv s(x)$, we can go further (making use of the properties of symmetric Tchebycheff polynomials) in order to evaluate asymptotically ($n \rightarrow \infty$), the minimum value of $L(y)$. J. Shohat (Philadelphia).

Břečka, W.: Über eine Arbeit von Prof. J. Geronimus. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 10, 65—67 (1934).

This Note gives a new method for finding asymptotically the least deviation from zero on $(-1, 1)$ of a polynomial $\sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \dots$, of degree n , thereon monotonic, with one of its coefficients σ_l fixed ($n \rightarrow \infty$, l finite). The problem for $l = 2s$ reduces to finding the asymptotic maximum for the absolute value of the coefficient of x^{n-2s}

in the polynomial $\varphi_n(x)$, of degree n , ≥ 0 in $(-1, 1)$, subject to the condition $\int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx = 1$

(which, in turn, yields the minimum of this integral, if the coefficient of x^{n-2s} is given). This is obtained by making use of the Legendre-series expansion of $\varphi_n(x)$. (A similar result for the coefficient of x^{n-2s-1} follows from a previous result of Brečka-Geronimus [Tôhoku Math. J. (1929)]. J. Shohat (Philadelphia).

Florin, Henri Bernard Joseph: Die Methoden der Heavisideschen Operatorenrechnung. Leiden: Diss. 1934. 112 S.

This dissertation discusses the Heaviside operational calculus and particularly its relation to general reversible linear transformations $f(x) \rightarrow \varphi(\xi): f(x) = \int K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$; $\varphi(\xi) = \int L(\xi, x) f(x) dx$. It is divided into two sections of which the first (algebraic) part treats such matters as the "expansion theorem" and the "power series solution". Applications to linear ordinary differential equations with variable coefficients are mentioned. In the second (linear transformation) part a discussion of the Bromwich and Carson integrals is given. Murnaghan (Baltimore).

Tricomi, F.: Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre. I. Inversione della trasformazione. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 232—239 (1935).

Es sei $f(s) = La[F(t)]$ die Laplacetransformierte von $F(t)$, also $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$. Bezeichnet $L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$ das n -te Laguerresche Polynom, so gilt $La[L_n(t)] = \frac{1}{s} \left(\frac{s-1}{s} \right)^n$. Mit Hilfe dieser Beziehung wird die reziproke Laplacetransformation in folgender Gestalt angegeben: Es sei $f(s)$ analytisch, im Unendlichen regulär und verschwinde dort wie $\frac{1}{s}$; bedeutet h eine reelle Zahl und entwickelt man

$$f(s) = \frac{1}{s+h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{s+h-1}{s+h} \right)^n,$$

so ist $f(s)$ die Laplacetransformierte von

$$F(t) = e^{-ht} \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t).$$

Die zuletzt angegebene Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf der ganzen positiven t -Halbachse. Die Voraussetzungen über $f(s)$ im Unendlichen können gemildert werden. Rellich (Marburg, Lahn).

Norris, Nilan: Inequalities among averages. Ann. math. Statist. **6**, 27—29 (1935).
Kurzer Beweis der geläufigen Tatsache, daß der „Potenzmittelwert“

$$\left(\frac{x_1^t + x_2^t + \dots + x_n^t}{n} \right)^{\frac{1}{t}}$$

bei festen $x_r > 0$, die nicht sämtlich einander gleich sind, eine monoton wachsende Funktion von t ist.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Cinquini, Silvio: Sopra una disuguaglianza di Jensen. Rend. Circ. mat. Palermo **58**, 335—358 (1934).

Ein auf die Jensensche Ungleichung bezügliches Ergebnis von Del Chiaro (vgl. dies. Zbl. **7**, 243) wird auf Funktionen von mehreren Variablen verallgemeinert.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Toda, Kiyoshi: On certain functional inequalities. J. Sci. Hiroshima Univ. A **4**, 27—40 (1934).

Es seien x_1, x_2, \dots, x_n reelle Zahlen und $f(x) = 0$ die Gleichung n -ten Grades mit den Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_n . Ferner seien y_1, y_2, \dots, y_{n-1} die Wurzeln von $f'(y) = 0$. Ist dann $\varphi(x)$ eine (in einem alle x_r enthaltenden Intervall) stetige konvexe Funktion, so gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \varphi(x_r) \geq \frac{1}{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \varphi(y_r). \quad (*)$$

[Der Spezialfall $\varphi(x) = x^m$ hiervon wurde schon von Bray (dies. Zbl. **3**, 2) und Kakeya (dies. Zbl. **7**, 99) auf weniger einfachem Wege bewiesen.] Durch wiederholte Anwendung von (*) mit $\varphi(x) = -\log x$ ergeben sich bekannte Ungleichungen zwischen den elementarsymmetrischen Funktionen der x_r (vgl. z. B. Hardy, Littlewood, Pólya: Inequalities. S. 52, Theorem 52. Cambridge 1934.) — Angeregt durch eine Frage von Kakeya untersucht der Verf. allgemeiner das Vorzeichen von

$$\binom{r}{0} M_\varphi(f) - \binom{r}{1} M_\varphi(f') + \dots + (-1)^r \binom{r}{r} M_\varphi(f^{(r)}),$$

wo $M_\varphi(f^{(r)})$ das arithmetische Mittel der Werte der [hier $(r+2)$ -mal differenzierbar vorausgesetzten] Funktion φ in den Nullstellen von $f^{(r)}$ ist. Als eine notwendige Bedingung dafür, daß dieser Ausdruck festes Vorzeichen besitzt, ergibt sich, daß r ungerade und das Vorzeichen von $\varphi^{(r+1)}$ fest ist.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Watson, G. N.: An inequality. Quart. J. Math., Oxford Ser. **5**, 221—223 (1934).

Take the general inequality for weighted arithmetic and geometric means (all sums and products referring to $r = 1, 2, \dots, n$):

$$\frac{\sum p_r (a_r + u)^{-1}}{p} \geq \{ \prod (a_r + u)^{-p_r} \}^{1/p} \quad (a_r, p_r > 0; p = \sum p_r),$$

multiply through by $\{ \prod (a_r + u)^{-p_r} \}^\lambda$ ($\lambda > 0$) and integrate, with respect to u , from 0 to ∞ . We get:

$$I \equiv \int_0^\infty \frac{du}{\{ \prod (a_r + u)^{p_r} \}^{\lambda+1/p}} \leq \frac{1}{\lambda p \{ \prod a_r^{p_r} \}^\lambda}, \quad (1)$$

equality, if and only if $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. — If we specialize: $n = 3$, $\lambda = \frac{1}{6}$, $p_r = 1$, $a_{1,2,3} = a^2, b^2, c^2$, we get

$$I \equiv \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}} \leq \frac{2}{\sqrt{abc}}, \quad (2)$$

which shows that a spherical conductor has the least capacity among all ellipsoidal conductors of the same volume (special case of a theorem of Poincaré). The author further expresses (1) in terms of Jacobian elliptic functions. He also cites Pólya's bounds for I in (2):

$$\sum \frac{3}{b c / a} \leq \frac{1}{2} I \leq \frac{1}{3} \sum a / b c. \quad J. Shohat \text{ (Philadelphia).}$$

Szegő, G.: An inequality. Quart. J. Math., Oxford Ser. **6**, 78—79 (1935).

It is here shown that the reasoning of Watson (see the preceding abstract), applied to the quantities $\{\log(a_r + u)\}$, leads to

$$(u + G)^p \leq \prod (a_r + u)^{p_r} \leq (u + M)^p \quad \left(M = \frac{\sum a_r p_r}{p}; \quad G = \prod a_r^{p_r/p} \right).$$

We thus get Watson's upper bound for I , also a lower bound, namely:

$$I \geq \frac{1}{\lambda p \left\{ \frac{\sum a_r p_r}{p} \right\}^{\lambda p}} = \frac{1}{\lambda p M^{\lambda p}},$$

which is an improvement over that given by Pólya. — The following more general inequality can be derived in the same manner:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\{\prod (a_r + u)^{p_r}\}^{\lambda + 1/p}} \leq \frac{1}{\lambda p} \left[\frac{1}{\prod (a_r + u)^{\lambda p_r}} \right]_{u_1}^{u_2} \quad (0 \leq u_1 < u_2),$$

which, specialized as above, states that a spherical shell has the least capacity among all shells bound by confocal ellipsoids with a given volume. *Shohat* (Philadelphia).

Radó, Tibor: On convex functions. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 266—285 (1935).

Let $f(x)$ be continuous and positive in the open interval (x_1, x_2) . For any real α we define

$$I(f, x, h, \alpha) = \left[(2h)^{-1} \int_{-h}^h f(x + \xi) d\xi \right]^{1/\alpha}, \quad \text{or} \quad \exp \left[(2h)^{-1} \int_{-h}^h \log f(x + \xi) d\xi \right],$$

according as $\alpha \neq 0$, or $\alpha = 0$, and analogously

$$A(f, x, h, \alpha) = \left[\frac{f(x - h)^\alpha + f(x + h)^\alpha}{2} \right]^{1/\alpha}, \quad \text{or} \quad [f(x - h)f(x + h)]^{1/2}.$$

Let \bar{E} be the set of all pairs (α, β) for which the following assertion is true: If $f(x)$ satisfies the inequality (*) $I(f, x, h, \alpha) \leq A(f, x, h, \beta)$ for $x_1 < x - h < x + h < x_2$, then $f(x)$ is convex in (x_1, x_2) . Let E be the set of all pairs (α, β) such that, whenever $f(x)$ (continuous and positive) is convex in (x_1, x_2) then (*) is satisfied. The main result of the paper is as follows. $(\alpha, \beta) \in E$ if and only if one of the following four conditions is satisfied: (I) $\alpha \leq -2$, $\beta \geq 0$; (II) $-2 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2}$, $\beta \geq (\alpha + 2)/3$; (III) $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, $\beta \geq \alpha \log 2 / \log(\alpha + 1)$; (IV) $1 \leq \alpha$, $\beta \geq (\alpha + 2)/3$. On the other hand, $(\alpha, \beta) \in \bar{E}$ if and only if $3\beta - \alpha - 2 = 0$. — Among the other results of the paper we mention the following one. Let γ be real and C_γ be the class of functions (continuous and positive) for which $f^\gamma \operatorname{sgn} \gamma$ is convex, or $\log f$ is convex in (x_1, x_2) , according as $\gamma \neq 0$, or $\gamma = 0$. Let C_γ^* be the class of functions (continuous and positive) satisfying the inequality $I(f, x, h, \delta) \leq [f(x - h) + f(x + h)]/2$. Then $C_\gamma^* \in C_\gamma$ for $2\gamma + \delta - 3 = 0$. The converse, $C_\delta^* \in C_\gamma$, $2\gamma + \delta - 3 = 0$, is true if and only if $\gamma \leq 1$, or $\gamma \geq 2$.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Reihen:

Matsumoto, Toshizō: On the group of zero-sequence. Mem. Coll. Sci. Kyoto A **18**, 1—7 (1935).

Die Gesamtheit der Substitutionen $S \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1, 2, 3, \dots, \nu, \dots \\ s_1, s_2, s_3, \dots, s_\nu, \dots \end{smallmatrix} \right)$ für welche $\sum_1^\infty |u_\nu - u_{s_\nu}|$ konvergiert, wird Gruppe der Folge $\{u_\nu\}$ genannt. — An die früheren Arbeiten anknüpfend [Group-theory of semi-convergent series. Mem. Coll. Sci. Kyoto **10** (1927); Group-theory of sequences of numbers. Ibid. **11** (1928); On the decompositions of substitutions of groups of sequences. Ibid. **13** (1930)] werden Sätze von der folgenden Form bewiesen: Sei $u_n \rightarrow 0$, und besitze $\{u_n\}$ die symmetrische Gruppe, dann ist $\sum |u_n|$ konvergent. — Ist $0 \leq u_n \rightarrow 0$, dann ist die Gruppe von $\{u_n\}$ eine echte Untergruppe der Folge $\{u_n^q\}$, $q > 1$.

Karamata (Beograd).

Tamarkin, J. D.: On the notion of regularity of methods of summation of infinite series. *Bull. Amer. Math. Soc.* **41**, 241—243 (1935).

Let $\mathfrak{A} = (a_{mn})$ be an infinite matrix. We say that it defines a regular method of summation if (1) for every convergent sequence $x = (x_1, x_2, \dots)$ there is a number $m'(x)$ such that for $m \geq m'(x)$ each of the series (*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n$ converges to a sum y_m , and (2), for a fixed x , $\lim y_m = \lim x_n$. This definition differs slightly from the usual definition, in which we suppose the convergence of (*) for all values of m . The author shows that conditions (1) and (2) imply the existence of a number m' , independent of x , and such that, if $m \geq m'$, the series (*) converge for every convergent (x_1, x_2, \dots) .
A. Zygmund (Wilno).

Avakumović, V.: Sur une extension de la condition de convergence des théorèmes inverses de sommabilité. *C. R. Acad. Sci., Paris* **200**, 1515—1517 (1935).

The author extends Karamata's Tauberian theorems for Laplace integrals $J(\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} dA(t)$, where $A(t)$ is of bounded variation for $t > 0$ and the integral converges for $\sigma > 0$. The assumption $J(\sigma) = O(1)$ as $\sigma \rightarrow 0$ implies $A(t) = O(1)$ as $t \rightarrow \infty$, if the condition

$(K_{\varrho}) \quad \varrho(x') A(x') - \varrho(x) A(x) > -w(\lambda) \varrho(x)$ for $0 < x \leq x' \leq \lambda x$,
is satisfied by a function $\varrho(x)$ such that

$$0 < m \leq \varrho(x')/\varrho(x) \leq M \text{ for } 0 < x \leq x' \leq \lambda x.$$

The extension lies in the less stringent conditions imposed upon $\varrho(x)$. The "O" can be replaced by "o" provided (K_{ϱ}) is satisfied in the following sharper form

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \min_{x \rightarrow \infty, x \leq x' \leq \lambda x} [\varrho(x') A(x') - \varrho(x) A(x)]/\varrho(x) > -w(\lambda) \rightarrow 0$$

E. Hille (New Haven, Conn.).

Williams, W. Ll. G.: The sum of a series of cosecants. *Philos. Mag.*, VII. s. **19**, 402—404 (1935).

Mittels der Euler-Maclaurinschen Summenformel wird eine halbkonvergente Entwicklung für

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sin \frac{k\pi}{n} \right)^{-1}, \quad n \rightarrow \infty,$$

abgeleitet, die mit einer Formel von Watson [*Philos. Mag.*, VI. s. **31**, 111—118 (1916)] übereinstimmt. Nur in der Abschätzung des Restes besteht ein geringer Unterschied.
G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Achyeser, N., und M. Krein: Über Fouriersche Reihen beschränkter summierbarer Funktionen und ein neues Extremumproblem. II. *Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff*, IV. s. **10**, 3—32 (1934).

For part I see this Zbl. **10**, 351. — The authors say that $f(z) \in A_{\tau}$ if (1) $f(z)$ is regular and of non-negative real part in $|z| < 1$, and (2) $f(z)$ is regular and $\Re[f(z)] = 0$ on the arc $|z| = 1$, $\tau < \arg z < 2\pi - \tau$, $0 < \tau < \pi$. If in addition $f(z) \neq 0$ on the arc, $f(z) \in B_{\tau}$. They find n. a. s. c. for $f(z)$ to belong to A_{τ} or B_{τ} , e. g., $f(z) \in A_{\tau}$ if and only if

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\sigma(t) + i\Im[f(0)].$$

Their main problem is to determine if the equations

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-kit} d\sigma(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

have a solution with either $\sigma(t) \uparrow$ or $0 \leq [\sigma(t_1) - \sigma(t_2)]/(t_1 - t_2) \leq L$. The solution of the problem is obtained from the properties of the classes A_{τ} and B_{τ} . E. Hille.

Moursund, A. F.: On the r -th derived conjugate function. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 131—136 (1935).

The author defines the r -th derived conjugate function in two different ways, and proves that the two limits exist simultaneously and are equal. He then shows that the r -th derived series of the conjugate series of a given function is summable to $\tilde{f}_2^{(r)}(x)$ by the Bosanquet-Linfoot (α, β) method with $\alpha = r$, $\beta > 1$ or $\alpha > r$

wherever $\tilde{f}_2^{(r)}(x)$ exists, and $\int_0^s |A_r(t)| dt = o(s^{r+1})$. Here

$$A_r(s) = f(x+s) + (-1)^{r+1} f(x-s) - 2 \sum_{k=0}^{\varrho} \frac{[p(s)]^{r-1-2k}}{(r-1-2k)!} f^{(r-1-2k)}(x),$$

$\varrho = [(r-1)/2]$, $p(s) = s - 2k\pi$ for $(2k-1)\pi < s \leq (2k+1)\pi$, and

$$\tilde{f}_2^{(r)}(x) = -r! \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} A_r(s) s^{-r-1} ds - C_r,$$

where C_r is a certain constant.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Kuniyeda, Motoji: On absolute summability (A) of allied series and derived series of Fourier series. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A **2**, 103—113 (1934).

Let $f(t)$ be integrable L over $(-\pi, \pi)$, and periodic with 2π . Let x be fixed and let

$$\varphi_0(t) = f(x+t) - f(x-t), \quad \varphi_{\alpha}(t) = (\alpha/t) \int_0^t (1-u/t)^{\alpha-1} \varphi_0(u) du \text{ for } 0 < \alpha.$$

The author proves: (1) the allied series of the Fourier series of f is absolutely summable (A) at $t = x$ if, for some $0 \leq \alpha$ and $0 < \eta$, the integral $\int_0^{\eta} |\varphi_{\alpha}(t)|/t dt$ is finite;

(2) the first derived series of the Fourier series of f is absolutely summable (A) at $t = x$ if, for some $0 \leq \alpha$ and $0 < \eta$, the integral $\int_0^{\eta} |\varphi_{\alpha}(t)|/t^2 dt$ is finite. The result (1)

reduces to one given by Prasad (see this Zbl. **7**, 160) for $\alpha = 1$. The integral conditions in (1) and (2) are analogous to some given by Bosanquet (see this Zbl. **9**, 13) for Fourier series. These integral conditions can be expressed in terms of the fractional

integral $\theta_{\alpha}(t)$ of $\theta_0(t) = (2/\pi) \int_t^{\infty} \varphi_0(u)/u du$.

J. J. Gergen (Rochester).

Foà, A.: Limitazione delle somme (C, 1) di una serie di polinomi di Legendre di una funzione lipschitziana di ordine $\alpha > 1/2$. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 239 bis 242 (1935).

En généralisant quelques propositions connues sur le degré de convergence de la série de Legendre d'une fonction l'auteur démontre que, si une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $\langle -1, 1 \rangle$ y remplit la condition

$$|f(x') - f(x)| < k|x' - x|^{\alpha}, \quad k > 0, \quad \alpha > \frac{1}{2},$$

on a, quel que soit x et n , l'inégalité

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{k}{\sqrt{n}}$$

où les $\sigma_n(x)$ sont des sommes (C, 1) de la série de Legendre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \sim f(x)$.

F. Leja (Warszawa).

Differentialgleichungen:

Kramers, H. A.: Das Eigenwertproblem im eindimensionalen periodischen Kraftfelde. Physica **2**, 483—490 (1935).

Das Eigenwertspektrum der Bewegung eines Elektrons in einem eindimensionalen periodischen Kraftfelde setzt sich aus Teilstreckenspektren zusammen, welche von

„verbotenen“ Intervallen getrennt werden. Verf. erbringt für dieses mathematisch zuerst von O. Haupt bewiesene Theorem einen neuen Beweis. Wie auch in Haupts Arbeit setzt dieser Beweis die Beschränkung auf reelle Funktionen voraus. Er geht weiterhin noch auf einige feinere, ebenfalls aus der Theorie der Hillschen Differentialgleichung bekannte Züge des Eigenwertspektrums ein. Man vgl. hierzu Erg. Math. **1**, H. 3.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Okamura, Hiroshi: Sur l'unicité de la solution de $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Mem. Coll. Sci. Kyoto A **17**, 319—328 (1934).

Ist $f(x, y)$ in dem Bereich $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ stetig und ist dort $f(x, 0) = 0$, so ist offenbar die x -Achse eine durch den Punkt $x = 0$, $y = 0$ gehende Integralkurve der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.

Dafür, daß es durch den Punkt $0, 0$ keine andere Integralkurve gibt, ist hinreichend (was schon bekannt war) und zugleich notwendig (was Verf. durch Konstruktion einer Funktion g zeigt), daß es zu der Funktion $f(x, y)$ eine Funktion $g(x, y)$ gibt, die beschränkt ist und stetige partielle Ableitungen hat und für die

$$g(x, 0) = 0, \quad g(x, y) > f(x, y)$$

ist und die Differentialgleichung $y' = g(x, y)$

die x -Achse als einzige durch den Punkt $0, 0$ gehende Integralkurve hat. Verf. zeigt weiter, daß der Satz einige schon vorher bekannte Eindeigkeitskriterien enthält.

Kamke (Tübingen).

Armellini, G.: Sopra un'equazione differenziale della dinamica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 111—116 (1935).

Une fonction continue croissante $F(t)$ tend régulièrement vers l'infini, s'il est impossible de construire une suite d'intervalles de densité moyenne nulle sur $0 < t < \infty$, telle que l'accroissement de F sur l'ensemble complémentaire soit fini. Des conditions suffisantes pour que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m(t)x = 0$$

tendent vers zero pour $t \rightarrow \infty$, sont: $m(t) > 0$, $m'(t) > 0$; $\log m(t)$ tend régulièrement vers l'infini. Ce critère est plus simple par son énoncé et par la démonstration que ceux donnés par M. Biernacki [Prace mat. fiz. **40**, 163—171 (1933), ce Zbl. **6**, 200] et par H. Milloux [ibidem **41**, 39—54 (1934), ce Zbl. **9**, 164]. W. Stepanoff.

Tonolo, A.: Sopra un teorema di confronto di Fubini. Boll. Un. Mat. Ital. **14**, 67—70 (1935).

Ein Resultat von G. Fubini [Su un teorema di confronto per le equazioni del secondo ordine. Boll. Un. Mat. Ital. **12**, 134—137 (1933); vgl. a. dies. Zbl. **7**, 10] wird erweitert auf Systeme von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei gesuchten Funktionen.

Rellich (Marburg, Lahn).

Barnard, R. J. A.: Lagrange's equation. Math. Gaz. **19**, 31—33 (1935).

Einige elementare Beispiele, welche die Ungenauigkeit der Darlegung der Theorie der Differentialgleichung $Pp + Qq = R$ in den Lehrbüchern von Piaggio, Forsyth usw. zeigen.

Janczewski (Leningrad).

Lewis jr., D. C.: On a theorem of Féraud. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 123—130 (1935).

The problem of reducing the Pfaffian system of equations defined by

$$\delta \left(\sum_{i=1}^{2m} X_i dx_i + Q dt \right) = 0$$

to a Hamiltonian system reduces to that of finding a non-singular transformation $x_i = x_i(y_1, \dots, y_{2m})$ such that

$$\sum_{i=1}^{2m} X_i dx_i = \sum_{i=1}^m y_{2i} dy_{2i-1} + dw,$$

where dw is a perfect differential in the y 's. It is also required that the origin be left invariant, the transformation being valid in its neighbourhood. By a method depending only on existence theorems for ordinary (instead of partial) differential equations, the author proves the existence of the transformation under the following conditions: (1) the X 's are of class C^{4m+p} ($p \geq 0$), (2) none of the X 's vanish at the origin, (3) the determinant $|\partial X_i / \partial x_j - \partial X_j / \partial x_i|$ does not vanish at the origin. These conditions are more general than those assumed in the proof of Féraud, C. R. Acad. Sci., Paris **190**, 358—360 (1930).

J. L. Synge (Toronto).

Artemjew, N.: Periodische Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen. *gen. Techn. Physics USSR* **1**, 187—193 (1934).

Vgl. dies. Zbl. **8**, 233 bzw. **9**, 421 [Witt].

Spampinato, N.: Intorno ad una proprietà delle equazioni differenziali omogenee a coefficienti costanti. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **21**, 73—76 (1935).

The differential equation

$$\left(a_0 \frac{\partial^n}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n}{\partial x^{n-1} \partial y} + a_2 \frac{\partial^n}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \cdots + a_n \frac{\partial^n}{\partial y^n} \right) F = 0$$

where the a 's are real numbers has the auxiliary equation

$$\varphi(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \cdots + a_n \xi^n = 0.$$

Let K be an $n \times n$ real matrix having $\varphi(\xi)$ as its minimum function. For any analytic function F , write

$$F(Ix + Ky) = F_0(x, y) I + F_1(x, y) K + F_2(x, y) K^2 + \cdots + F_{n-1}(x, y) K^{n-1}.$$

It is shown that F_1, F_2, \dots, F_{n-1} are solutions of the given equation, and if $a_0 \neq 0$, so is F_0 . This paper is an outgrowth of papers by Sobrero (this Zbl. **8**, 395; **9**, 112; **10**, 207), Scorza (this Zbl. **9**, 242) and the author (this Zbl. **9**, 391). MacDuffee.

Humbert, Pierre: Sur une équation aux dérivées partielles. *Acta Pontif. Acad. Sci. Novi Lyncei* **88**, 154—158 (1935).

The author considers the partial differential equation

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta U = 64 x U, \quad \text{where} \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

This equation is satisfied by a potential corresponding to a non-Newtonian attraction. Solutions of the equation are obtained in terms of Bessel functions of the third order defined by

$$J_{m,n}(u) = \frac{u^{m+n}}{3^{m+n} \Gamma(m+1) \Gamma(n+1)} {}_0F_2\left(m+1, n+1; -\frac{u^2}{27}\right) \quad W. N. Bailey.$$

Winants, Marcel: Équation hyperbolique du troisième ordre à coefficients constants et de la catégorie III: Résolution du problème de Cauchy par la méthode des approximations successives. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. **21**, 283—293 (1935).

Auf das System

$$z_{xx}y - z_{xy}y = f(x, y, z), \quad z = z_x = z_{xx} = 0 \quad \text{für} \quad x = y$$

in Integralform verwandelt, wird die Methode der sukzessiven Approximationen angewandt, um eine Lösung $z(x, y)$ in einer Umgebung von $x = y = 0$ in der Nähe der Geraden $x = y$ zu gewinnen.

G. Cimmino (Napoli).

Picone, Mauro: Recenti contributi dell'istituto per le applicazioni del calcolo all'analisi quantitativa dei problemi di propagazione. *Mem. Accad. Ital.* **6**, 643—667 (1935).

Fragen, die mit der Randwertaufgabe $a(x) u_{xx} + b(x) u_{xt} + c(x) u_{tt} + p(x) u_x + q(x) u_t + r(x) u = B(x, t)$; $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = f_1(x)$, $[\alpha_1 u_x + \beta_1 u_x + \gamma_1 n]_{x=0} = g_1(t)$, $[\alpha_2 u_x + \beta_2 u_t + \gamma_2 n]_{x=l} = g_2(t)$ zusammenhängen. Durch die Laplacetransformation

$$\int_0^\infty u(x, t) e^{-\xi t} dt = u^*(x, \xi)$$

mit geeignetem $\zeta = \xi + i\eta$ wird diese Aufgabe verwandelt in die Randwertaufgabe einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung für $u^*(x; \xi)$. Denkt

man sich diese gelöst, so bleibt die Aufgabe, aus u^* die Funktion u zu bestimmen, d. h. die reziproke Laplacetransformation aufzusuchen. Das wird in verschiedener Form unternommen, insbesondere unter Zuhilfenahme der Laguerreschen und der Legendreschen Polynome.

Rellich (Marburg, Lahn).

Siddiqi, Raziuddin: Boundary problems in non-linear parabolic equations. J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 125—128 (1934).

In einer früheren Arbeit [Math. Z. 35, 464—484 (1932); dies. Zbl. 4, 256] hat Verf. für die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung $u_{xx} - u_t = P(x, t, u)$ die Aufgabe behandelt, die für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindende Lösung zu finden, die sich für $t = 0$ auf eine gegebene Funktion $f(x)$ reduziert. In der vorliegenden Arbeit werden im Falle $P \equiv u^2$ zwei Erweiterungen dieser Aufgabe behandelt. Die erste entsteht, wenn an Stelle der Geraden $x = 0$ bzw. $x = \pi$ zwei Kurven $x = h_1(t)$ bzw. $x = h_2(t)$ [$h_1(0) = 0$, $h_2(0) = \pi$, $h_2(t) > h_1(t)$] treten. Diese Aufgabe wird durch eine Transformation auf die frühere mit $P \equiv g(t) u^2$ zurückgeführt. Zweitens wird die Aufgabe behandelt, die entsteht, wenn an Stelle der Bedingung $u(\pi) = 0$ die Bedingung $u_x = 0$ für $x = \pi$ tritt. Diese Aufgabe wird durch Spiegelungsverfahren auf die in der früheren Arbeit behandelte zurückgeführt.

E. Rothe (Breslau).

Lowan, Arnold N.: Heat conduction in a semi-infinite solid of two different materials. Duke math. J. 1, 94—102 (1935).

The problem is formulated as follows:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} T_1 = f_1(x), \quad -a < x < 0$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} T_2 = f_2(x) \quad 0 < x < \infty$$

$$T_1 = 0, \quad x = -a, \quad T_1 = T_2, \quad K_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = K_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \Phi(t) \text{ say.} \quad x = 0$$

The functions T_1 and T_2 are first expressed in terms of the unknown function $\Phi(t)$ and a Volterra integral equation is obtained by putting $T_1 = T_2$ for $x = 0$. This is solved by a method depending on the use of a Laplace operator. *H. Bateman*.

Manià, Basilio: Il problema di Dirichlet discontinuo per la corona circolare. Boll. Un. Mat. Ital. 14, 98—103 (1935).

Manià, B.: Sopra il problema di Dirichlet per il campo compreso fra due sfere concentriche. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 137—142 (1935).

Manià, B.: Sopra il problema di Dirichlet per il campo compreso fra due sfere concentriche. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 243—247 (1935).

Auf den Oberflächen zweier konzentrischer Kugeln sind Funktionen vorgegeben. Durch einfache Reihenentwicklung wird in der Schale zwischen diesen beiden Kugeloberflächen die zu den vorgegebenen Belegungen gehörige harmonische Funktion angegeben. Der zweite Teil bringt das Analoge für die Ebene.

Rellich.

Dix, C. H.: Mechanical invariants of the sweeping-out process. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 92—95 (1935).

The following result is obtained. Let R be a bounded, closed point-set in space. Let S be the frontier of a bounded domain D containing R . Then, if a general bounded distribution of positive mass $\Phi(e)$ on R is swept out on S , the center of gravity and the principal axes are invariants for the sweeping-out transformation. The theorem is first proved for the case where S is a level surface of the potential function $V(P)$ of $\Phi(e)$ and $\Phi(e)$ is so restricted that Green's theorem is applicable for D , V and any function $U(P)$ harmonic in space. In this case the author derives the formula

$$\frac{1}{4\pi} \int_S U(M) \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_M dS_M = \int_R U(P) d\Phi(e_P) \quad (n, \text{ the interior normal});$$

and from this formula the theorem readily follows. Extension is then made to the general case by means of F. Riesz's representation of super-harmonic functions, the fourth volume averages

of $V(P)$, treated recently by Evans (this Zbl. 6, 349), and by sweeping-out Φ and its transform on S on a level surface of V . J. J. Gergen (Rochester).

Evans, Griffith C.: On potentials of positive mass. I. Trans. Amer. Math. Soc. 37, 226—253 (1935).

Ce Mémoire contient un exposé très clair des propriétés fondamentales du potentiel newtonien d'une couche non-négative, défini par l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes $U(M) = \int \frac{df(e_P)}{MP}$, où $f(e_P)$ désigne une fonction de masse distribuée en quantité finie sur un ensemble fermé et borné F ; c.-à-d. que $f(e_P)$ est une fonction non-négative et complètement additive d'ensemble mesurable (B), s'annulant identiquement sur le complément de F . Parmi des résultats obtenus par l'auteur il est à mentionner 1° une démonstration élégante du théorème important de F. Riesz en vertu duquel toute fonction surharmonique dans un domaine borné D peut être représentée dans tout domaine fermé $\Omega \subset D$ comme la somme d'une fonction harmonique et d'un potentiel (dans le sens précisé plus haut) d'une couche non-négative sur Ω [voir F. Riesz, Acta math. 54, 321—360 (1930)]; la démonstration s'appuie sur quelques lemmes intéressants par eux-même, p. ex.: $\{U_n(M)\}$ étant une suite non-décroissante de potentiels correspondant à une suite $\{f_n(e)\}$ de fonctions d'ensemble qui déterminent des couches non-négatives sur un ensemble fermé et borné F , lorsque les fonctions $f_n(e)$ sont bornées dans leur ensemble, la limite $U(M) = \lim_n U_n(M)$ est aussi un potentiel et l'on a $f(F) = \lim_n f_n(F)$, où $f(e)$ désigne une fonction de masse correspondant à $U(M)$. 2° Théorème: $U(M)$ étant un potentiel et α une direction quelconque, la fonction $U(M)$ est absolument continue sur presque toute droite de direction α et sa dérivée partielle dans cette direction est intégrable (L) sur tout domaine borné et s'obtient presque partout par la dérivation formelle de l'intégrale. — Une partie du Mémoire est consacrée à l'étude de certaines questions élémentaires concernant des valeurs limites d'un potentiel. Soit notamment un ensemble ouvert T contenu dans le complémentaire de l'ensemble fermé et borné F , sur lequel la couche non-négative d'un potentiel $U(M)$ est répartie. Soit Q un point non-isolé de la frontière de T . Alors, si $U(P) \rightarrow U(Q)$ quand P tend vers Q en parcourant les points de la frontière de T , la même relation subsiste quand P parcourt les points intérieurs à T . — Un point Q frontière d'un ensemble ouvert Σ , est dit exceptionnel par rapport à cet ensemble lorsqu'il existe un potentiel $U(M)$ d'une couche non-négative telle que $\liminf U(M) > U(Q)$ lorsque $M \rightarrow Q$ en parcourant les points de Σ [l'inégalité $\liminf U(M) \geq U(Q)$ a lieu évidemment partout en raison de la sémicontinuité inférieure du potentiel]. L'auteur établit quelques conditions élémentaires nécessaires pour qu'un point Q soit exceptionnel par rapport à l'ensemble ouvert Σ . P. ex. pour qu'il le soit, il faut que (a) la densité de Σ au point Q soit nulle, (b) la dimension (au sens de Menger) de la frontière de Σ au point Q soit ≥ 1 . — Ensuite, en suivant la méthode de moyennes intégrales, l'auteur étudie les intégrales de Dirichlet

$$D(U) = \int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz,$$

$$D(U, V) = \int \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right] dx dy dz,$$

où $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$ désignent des potentiels.

Saks (Warszawa).

Binney, J. H.: An elliptic system of integral equations on summable functions. Trans. Amer. Math. Soc. 37, 254—265 (1935).

L'auteur parvient à une extension du théorème de Morera en cherchant une forme générale de la solution d'un système des équations intégrales

$$\int_s \Phi dy + \theta dx = A(\sigma), \quad \int_s -\theta dy + \Phi dx = B(\sigma), \quad (*)$$

où $A(e)$ et $B(e)$ sont des fonctions complètement additives d'ensemble mesurable (B) dans un domaine simplement connexe D et σ désigne le domaine limité par une courbe simple fermée et rectifiable s variant dans D . L'auteur démontre le théorème suivant: Les fonctions $\Phi(x, y)$ et $\theta(x, y)$ étant supposées intégrables (L) dans D , pour qu'elles satisfassent aux équations (*) sur presque tous les contours rectangulaires s (aux côtés parallèles aux axes) contenus dans D , il faut et il suffit qu'elles soient de la forme

$$\left. \begin{aligned} \Phi(M) &= \frac{1}{2\pi} \int_D \frac{1}{MP} [\cos(MP, y) dB(e_P) - \cos(MP, x) dA(e_P)] + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \theta(M) &= \frac{1}{2\pi} \int_D \frac{1}{MP} [\cos(MP, x) dB(e_P) + \cos(MP, y) dA(e_P)] + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

où $\psi(x, y)$ est une fonction harmonique dans D et les intégrales dans les membres droits de (**) sont définies pour presque tous les points $M=(x, y)$ dans le domaine D et sont intégrables (L) dans ce domaine. Ce théorème, moyennant quelques restrictions concernant l'existence de certaines intégrales sur s , est généralisé au cas où s est une courbe simple fermée et rectifiable quelconque parcourant D . Ensuite, l'auteur énonce ses résultats dans une forme complexe qui dégage la liaison avec le théorème de Morera; notamment, on peut mettre les équations (*) sous la forme d'une équation complexe $\int_s f(z) dz = I'(\sigma) \equiv A(\sigma) + iB(\sigma)$, et conformément la solution (**) sera donnée par la formule

$$f(z) = F(z) + \frac{1}{2\pi} \int_D \frac{1}{MP} e^{i\alpha} d\Gamma(e_P),$$

où $F(z)$ est une fonction holomorphe quelconque dans D et $\alpha = (MP, y)$. — Quant aux méthodes, la note se rattache au mémoire précédent de M. Evans (voir la revue précédente). Saks (Warszawa).

Spezielle Funktionen:

Babini, J.: Verallgemeinerte Bernoullische und verwandte Polynome. Bol. Semin. mat. Argent. 4, Nr 16, 23—25 (1934), u. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 10, 23—25 (1935); [Spanisch].

Jacob, M.: Sul fenomeno di Gibbs negli sviluppi in serie di polinomi di Hermite. Giorn. Ist. Ital. Attuari 6, 1—12 (1935).

L'A. démontre que dans les développements en polynomes d'Hermite le phénomène de Gibbs disparaît si l'on approche la fonction $f(x)$ par les expressions

$$f_n(x) = \frac{\frac{S_1(x)}{\sqrt{1}} + \frac{S_2(x)}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{S_n(x)}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}},$$

où

$$S_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu! \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\nu}(y) df(y) \int_{-\infty}^x \varphi_{\nu}(t) dt, \quad \varphi_{\nu}(t) = \frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}} e^{-\frac{t^2}{2}} = H_{\nu}(t) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

[des conditions supplémentaires: variation bornée dans $(-\infty, \infty)$, etc ... sont imposées à $f(x)$]. Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Zia-ud-Din, M., and N. G. Shabde: On some integrals involving Bessel functions. J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 119—124 (1934).

The authors follow a method used by Prof. G. N. Watson to obtain expressions for the integrals

$$\int_0^{\infty} J_{\mu}(at) J_{\nu}(bt) e^{-at} t^{\lambda} dt,$$

where λ has the values $-1, \mu + \nu, \mu + \nu + 1$, in terms of integrals with elementary

functions in the integrands. Finally a theorem of MacRobert is used to obtain the formula

$$\int_0^{\infty} (\tfrac{1}{2} \varrho)^{\varrho} \frac{\sqrt{\mu + \varrho}}{(a^2 + \varrho^2)^{\frac{1}{2}(\mu + \varrho)} \sqrt{\varrho + 1}} {}_2F_1\left(\frac{\varrho + \mu}{2}, \frac{1 - \mu + \varrho}{2}; \varrho + 1; \frac{\varrho^2}{a^2 + \varrho^2}\right) J_{\varrho}(\varrho \lambda) d\varrho = \frac{\lambda^{\mu}}{\lambda^2 - 1} e^{-a\lambda}$$

when $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$.

W. N. Bailey (Manchester).

Mehrotra, Brij Mohan: Some self-reciprocal functions. J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 133—134 (1934).

Some known theorems are here used to obtain particular examples of self-reciprocal functions. For example it is shown that, if $f(x)$ is self-reciprocal in the J_{ν} transform, then the functions

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{y}} J_{\nu}\left(a \log \frac{x}{y}\right) f(y) dy$$

are also self-reciprocal in the same transform.

W. N. Bailey (Manchester).

Schwid, Nathan: The asymptotic forms of the Hermite and Weber functions. Trans. Amer. Math. Soc. 37, 339—362 (1935).

Der Verf. stellt asymptotische Formen für die beiden Hauptlösungen $w_1(z)$ und $w_2(z)$ der Weberschen Differentialgleichung $w''(z) + (2k + 1 - z^2)w(z) = 0$ (die Weberschen parabolischen Zylinderfunktionen), für alle komplexen Werte von z und für große reelle und komplexe Werte von k auf. — Er benutzt dazu ein von Langer herrührendes Verfahren zur Untersuchung der asymptotischen Lösungen der Differentialgleichungen (Trans. Amer. Math. Soc. 34, 447—480; vgl. dies. Zbl. 5, 158). Der Verf. hat eine große Menge Sonderfälle zu unterscheiden. Im Fall k komplex findet er Ausdrücke folgender Gestalt:

$$w_j(z) \sim \frac{1}{2\left(\frac{z^2}{2k+1} - 1\right)^{\frac{1}{2}}} \{B_{j1} e^{i\xi} + B_{j2} e^{-i\xi}\} \quad (j = 1, 2)$$

wo:

$$e^{\pm i\xi} = \exp\left(\mp (z^2 - 2k - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{z}{2}\right) \left\{ \frac{z}{(2k+1)^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{z^2}{2k+1} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\pm \frac{(2k+1)}{2}}$$

Die Größen B_{jm} sind asymptotische Entwicklungen nach $\frac{1}{2k+1}$, von denen jedoch nur die Hauptglieder angegeben worden sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß ξ nicht allzu klein ist [daß also z nicht allzusehr in der Nähe von $(2k+1)^{\frac{1}{2}}$ gelegen ist]. — Wenn $\xi = O(|k|^{-\frac{1}{2}})$, so werden die obengenannten Entwicklungen illusorisch. Der Verf. gibt für diesen Fall andere Entwicklungen, in denen Besselsche Funktionen $J_{\pm \frac{1}{2}}(\xi)$ auftreten. — Die Arbeit endet mit einer Vergleichung der erhaltenen Ergebnisse mit denen anderer Autoren.

S. C. van Veen (Dordrecht).

Shastri, N. A.: Some integral representations of the K -function. J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 129—132 (1934).

Die K -Funktion, welche eine Lösung der Differentialgleichung

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = (x - n)y$$

ist, steht in enger Verbindung mit der konfluenten hypergeometrischen Funktion $W_{n, \frac{1}{2}}(x)$. Für letztere Funktion wird das bekannte Konturintegral angesetzt und durch mehrere Substitutionen werden hieraus Integralexpressionen für die K -Funktion abgeleitet.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Astbury, N. F.: The computation of the integrals required in mutual-inductance calculations. Proc. Physic. Soc., London 47, 86—91 (1935).

Verf. befaßt sich mit der Herleitung eines Ausdrucks für das vollständige elliptische Integral dritter Gattung, der im Gegensatz zu den existierenden Ausdrücken hierfür

eine einfache numerische Berechnung gewährleisten soll. Hierzu drückt er in bekannter Weise das genannte elliptische Integral dritter Gattung in den Integralen erster und zweiter Gattung aus und substituiert dann in diesen Ausdruck eine Reihe, wodurch die Berechnung, wie er zeigt, erheblich vereinfacht wird. Schließlich Anwendung des Ergebnisses auf die gegenseitige Induktion zwischen einer Spule und einer einzelnen Windung.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Davis, H. T.: An extension to polygamma functions of a theorem of Gauß. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 243—247 (1935).

Der Verf. versteht unter „Polygammafunktionen“ die aufeinanderfolgenden Ableitungen von $\log \Gamma(x)$, also: $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, $\psi'(x) \dots \psi^{(n)}(x)$. Die Funktionen genügen den Differenzgleichungen:

$$\text{und} \quad \psi^{(n)}(x+1) - \psi^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

$$\psi^{(n)}(1-x) + (-1)^{n+1} \psi^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} (\pi \cotg \pi x); \quad (\psi^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} n! \zeta(n+1)).$$

Der Verf. beweist für p und q ganz, $p < q$, $n > 0$:

$$\psi^{(n)}\left(\frac{p}{q}\right) + \psi^{(n)}\left(1 - \frac{p}{q}\right) = (-1)^{n+1} 2 \cdot n! \cdot q^n \sum_{r=1}^{q-1} \cos\left(\frac{2\pi r p}{q}\right) L^{(n+1)}\left(\frac{2\pi r}{q}\right) + 2q^n \psi^{(n)}(1)$$

$$\psi^{(n)}\left(\frac{p}{q}\right) - \psi^{(n)}\left(1 - \frac{p}{q}\right) = (-1)^{n+1} 2 \cdot n! \cdot q^n \sum_{r=1}^{q-1} \sin\left(\frac{2\pi r p}{q}\right) M^{(n+1)}\left(\frac{2\pi r}{q}\right),$$

wo:

$$L^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^m}, \quad M^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^m}.$$

Der Verf. leitet aus diesen Formeln explizite Ausdrücke für $\psi^{(n)}\left(\frac{p}{q}\right)$ ($0 < p < q \leq 4$) ab, z. B.: $\psi^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{n+1} n! (2^{n+1} - 1) \zeta(n+1)$. *S. C. van Veen (Dordrecht).*

Gage, Walter H.: Addition theorems for the doubly periodic functions of the second kind. Amer. J. Math. **57**, 342—344 (1935).

Ein rechnerischer Weg zur Gewinnung von Additionstheoremen für die doppeltperiodischen Funktionen 2. Art

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma}(x, y) = \vartheta'_1 \frac{\vartheta_{\alpha}(x+y)}{\vartheta_{\beta}(x) \vartheta_{\gamma}(y)}$$

($\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$) wird an dem Beispiel der Funktion φ_{331} erläutert. Sind x, y, u, v vier unabhängige Argumente, so ergibt sich $\varphi_{331}(x+u, y+v)$ gleich einem Bruch, dessen Zähler gleich dem Nullwert $(\vartheta'_1)^3$ multipliziert mit einer achtgliedrigen Summe ist; jeder Summand dieser Summe ist das Produkt aus vier Faktoren $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$, gebildet der Reihe nach für die Argumente (x, y) , (x, v) , (u, y) , (u, v) . Der Nenner des Bruches ist gleich dem Nullwert ϑ_2^3 multipliziert mit dem Ausdruck

$$\varphi_{111}(y, v) \varphi_{122}(y, -v) \varphi_{011}(x, u) \varphi_{122}(x, -u) \varphi_{311}(x, u) \varphi_{122}(x, -u).$$

Bessel-Hagen (Bonn).

Bell, E. T.: Doubly periodic functions of the second kind and the arithmetical form $xy + zw$. Amer. J. Math. **57**, 245—253 (1935).

Die doppeltperiodischen Funktionen 2. Art

$$\varphi_{abc}(x, y) = \vartheta'_1 \frac{\vartheta_a(x+y)}{\vartheta_b(x) \vartheta_c(y)},$$

wo der dreifache Index abc gewisse sechzehn Werte 001, 010, ..., 331 annimmt (für die die Funktionen schon von Hermite betrachtet wurden), geben Anlaß zu Identitäten der Gestalt

$$\varphi_{abc}(x, y) \varphi_{rst}(x, -y) = AB + CD, \quad (1)$$

wo jede der Größen A, B, C, D eine Funktion entweder von x allein oder von y allein ist. Eine solche Identität heißt vom 2. Grade in den Thetaquotienten der rechter Seite, wenn jede der Größen A, B, C, D eine solche Fourierentwicklung hat, bei der die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von q nur Funktionen der Teiler der Exponenten enthalten. Der vollständige Satz der Identitäten (1) vom 2. Grade enthält ein Teilsystem aus 25 Identitäten, aus denen die übrigen durch gewisse triviale Transformationen abgeleitet werden können. Diese 25 Identitäten gibt Verf. ausgerechnet an. Sodann stellt er die arithmetischen „Paraphrasen“ zu den Identitäten auf. Es mag genügen, eine solche Paraphrase als Beispiel hinzuschreiben:

$$\begin{aligned} & \sum [f(d_1 - d_2, \delta_1 + \delta_2) - f(d_1 + d_2, \delta_1 - \delta_2)] \\ &= \sum [(d-1)\{f(0, d) - f(d, 0)\} + \sum_{r=1}^{\delta-1} \{f(d, r) - f(r, d) + f(d, -r) - f(r, -d)\}]. \end{aligned}$$

Hierin bedeutet $f(x, y)$ eine beliebige eindeutige Funktion der ganzzahligen Variablen x, y , die nur die Bedingung $f(x, y) = f(-x, -y)$ zu erfüllen hat. Die Summe linker Hand ist zu erstrecken über alle Zerfällungen der natürlichen Zahl n in der Gestalt $n = d_1 \delta_1 + d_2 \delta_2$, wo $d_1, d_2, \delta_1, \delta_2$ irgendwelche natürliche Zahlen sind, die Summe rechter Hand über alle Zerlegungen $n = d\delta$, wo d und δ natürliche Zahlen sind. — Zum Schluß deutet Verf. an, wie durch Kombination der von ihm aufgestellten Formeln sich allgemeinere gewinnen lassen.

Bessel-Hagen (Bonn).

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Sanielevici, S.: Sur certaines équations intégrales. Ann. Sci. Univ. Jassy 20, 33 bis 38 (1935).

The Legendre polynomials are the characteristic functions of the symmetric kernel $K(x, y)$ where for $-1 \leq x \leq y \leq +1$

$$K(x, y) = \log 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log [(1-x)(1+y)]$$

the characteristic values being $\lambda_n = n(n+1)$. The author considers the integral equation whose kernel is $K(\alpha x, y)$, $-1 \leq x, y \leq +1$, $0 < \alpha < 1$. The characteristic values are $\lambda_n = n(n+1)\alpha^{-n}$, and the characteristic functions are polynomials. He also considers the adjoint equation. E. Hille (New Haven, Conn.)

Satô, Tuneszô: An integral equation with a parameter. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 18, 35—39 (1935).

The integral equation considered is

$$\varphi(x) = \lambda A(x) \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy,$$

$K(x, y)$ continuous on $a \leq x, y \leq b$, λ a parameter. It is stated that when $A(x)$ is invariant in sign on (a, b) , and $|A(x)|$ is sufficiently small, there exists at least one non-identically vanishing solution of the equation. The ref. has not been able to determine what the author intends to say in the last paragraph of the note, on which the proof hinges.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Ghermanesco, M.: Sur le troisième théorème de Fredholm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 21, 247 (1935).

Correction of a mistake in a previous paper by the author [Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 686—691 (1934); this Zbl. 9, 402]. J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Giraud, Georges: Équations à intégrales principales; étude suivie d'une application. Ann. École norm., III. s. 51, 251—372 (1934).

The main results of the first three chapters of this memoir have already been set forth in the abstract of the author's preliminary communication (see this Zbl. 9, 257). The perplexing details of definitions, assumptions and proofs must be consulted in the original paper. Ch. I is devoted to composition of certain kernels involving principal values of the integral; the calculation is carried through in typical cases in Ch. II. The corresponding integral equations are discussed in Ch. III, the

case of three and higher dimensions being postponed to a later communication. — Ch. IV is devoted to the following boundary value problem. Let D be a bounded domain in Euclidean m -space, S its boundary satisfying certain conditions of regularity. Consider the operations

$$\begin{aligned}Fu &\equiv \sum a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu, \\ \Theta u &\equiv \sum a_{\alpha\beta} \bar{\omega}_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\Omega} \sum \psi_\alpha \frac{\partial u}{\partial t_\alpha} + \psi u.\end{aligned}$$

Here $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m$; $a_{\alpha\alpha} > 0$, $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $a_{\alpha\beta}$ is defined in $D + S$, ψ, ψ_α and Ω on S , all functions satisfy Lipschitz conditions. The $\bar{\omega}_\alpha$ are the direction cosines of the exterior normal of S , the t_α are local parameters used in defining S . If f is continuous in $D + S$ and φ satisfies a Lipschitz condition on S , find a function u , continuous in $D + S$, satisfying $Fu = f$ in D and $\Theta u = \varphi$ on S . This problem is reduced to integral equations with principal values, and the existence and properties of a Green's function are discussed.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Oberg, E. N.: The approximate solution of integral equations. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 276—284 (1935).

Sei $L(u) \equiv u(x) - \int_a^b k(x, t) u(t) dt = f(x)$, wobei k und f stetig sind und die Gleichung $L(u) = 0$ keine nichttrivialen Lösungen besitzt. Es wird unter einigen Bedingungen bewiesen, daß das Polynom $P_n(x)$, für welches $\int_a^b |f(x) - L(P_n)|^m dx = \min$ wird ($m \geq 0$), gegen die Lösung $u(x)$ konvergiert (vgl. analoge Ergebnisse von McEwen über lineare Differentialgleichungen: dies. Zbl. 3, 8; 6, 304). *Janczewski*.

Teofilato, Pietro: Determinazione di una funzione quando ne sia nota una sua particolare trasformata. Acta Pontif. Acad. Sci. Novi Lyncaei 88, 25—34 (1935).

Es handelt sich um die Lösung der Integralgleichung erster Art mit dem Kern $\sin st$, $0 \leq t \leq \pi$. Verf. sucht nach einer für die numerische Rechnung geeigneten Annäherungsmethode: er approximiert die k ersten Koeffizienten der Fourierschen Sinusentwicklung der unbekannten Funktion durch Linearkombinationen der vom bekannten Gliede für k vorgegebene Werte von s angenommenen Werte. Für die trigonometrische Summe mit den so angenäherten Koeffizienten findet er, daß sie für $s \rightarrow \infty$ im Sinne mittlerer Konvergenz konvergiert. *G. Cimmino* (Napoli).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Kamke, E.: Kritische Bemerkungen zu K. Marbe, Grundfragen der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung und theoretischen Statistik. Jber. Deutsch. Math.-Ver. 45, 65—83 (1935).

Vgl. dies. Zbl. 9, 405.

Tedeschi, B.: Sull'uso della formola approssimata di Laplace nelle applicazioni del calcolo delle probabilità. Giorn. Ist. Ital. Attuari 6, 69—80 (1935).

Der Verf. vergleicht die Genauigkeit der 3 Formeln

$$P_1 = \theta(\lambda) + \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda^2}, \quad P_2 = \theta(\lambda) \quad \text{und} \quad P_3 = \theta(\lambda')$$

Laplacesche Formel mit und ohne Korrektionsglied, Eggenbergersche Formel), die zur approximativen Berechnung der bekannten Wahrscheinlichkeit

$$W = \sum_{i=-l}^l \frac{n!}{(np+i)!(nq-i)!} p^{np+i} q^{nq-i}$$

benutzen. Dabei ist:

$$\theta(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda e^{-t^2} dt, \quad \mu = \sqrt{npq}, \quad \lambda = \frac{l}{\mu\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \lambda' = \frac{l + \frac{1}{2}}{\mu\sqrt{2}}.$$

Für $\eta = \frac{P_1 - P_3}{P_1}$ ergibt sich die Abschätzung $\eta < \frac{1}{2\mu^2}$. Unter Vorgabe einer festen Wahrscheinlichkeit W , der Grenzen $-l$ und $+l$ und der Grundwahrscheinlichkeit p wird mit Hilfe dieser Näherungsformel für die Fälle $\lambda \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$ eine untere Grenze \bar{n} für die Anzahl der Versuche berechnet. Diese untere Grenze dient dann als Gütemaß für die Näherungsformeln. An zwei Beispielen wird gezeigt, daß die Eggenbergersche Formel (P_3) den Vorzug verdient.

Münzner (Göttingen).

Olds, E. G.: Distributions of greatest variates, least variates, and intervals of variation in samples from a rectangular universe. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 297—304 (1935).

Über das Schema von Ziehungen ohne Zurücklegung bei mit bzw. 0, 1, . . . numerierten Kugeln.

Herman Wold (Stockholm).

Maeda, Fumitomo: Application of the theory of set functions to the mixing of fluids. J. Sci. Hiroshima Univ. A **5**, 1—6 (1934).

Verf. stellt sich die Aufgabe, das Poincarésche Problem der Mischung von Flüssigkeiten unter sehr allgemeinen Voraussetzungen (nichtstationäre Bewegung, ohne Integralinvariante) zu lösen. Die dazu erforderliche Annahme (8) (S. 4) ist jedoch, wie sich leicht nachweisen läßt, mit den übrigen Voraussetzungen des Verf. unverträglich, so daß der Beweis hinfällig wird. Übrigens ist die vom Verf. gebrauchte Methode der Markoffschen Ketten bekanntlich [vgl. Hadamard, Atti Congr. Intern. Mat. Bologna **5**, 138 (1928)] auf Fragen dieser Art aus prinzipiellen Gründen überhaupt nicht anwendbar.

Khintchine (Moskau).

Münzner, Hans: Über die Schnelligkeit der Rassenvermischung. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforsch. **1**, 36—40 (1935).

Unter gewissen schematischen erblichkeitstheoretischen Voraussetzungen geht eine Rassenvermischung rasch vor sich.

Herman Wold (Stockholm).

Thompson, William R.: On the theory of apportionment. Amer. J. Math. **57**, 450 bis 456 (1935).

The author continues his investigation [see Biometrika **25**, 285—294 (1933)] on the topic of proportionate selection of a method of "treatment" involving a monotone increasing function rather than the abrupt critical change in policy involved in making no distinction up to a certain point and thereafter rejecting entirely one method in favor of its preferred rival. The object of this paper is to show that the probability of one method being better than its rival is of the same algebraic form as the known expression for the probability that by drawing at random without replacement from a mixture of white and black balls we shall encounter a given number of white balls before a given number of black balls. The group of substitutions upon the four arguments leaving this probability function invariant is also found. Using this mechanical homologue, the author constructed a rude triangular box and by actual shuffling of balls obtained a numerical table agreeing well with such theoretical results as were obtained.

Albert A. Bennett (Providence).

Darmois, Georges: Sur les lois de probabilité à estimation exhaustive. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1265—1266 (1935).

Having started from certain general hypotheses, not given in the note, the author publishes a general expression for frequency functions satisfying R. A. Fisher's condition of sufficient estimation (this Zbl. **9**, 219).

H. Wold (Stockholm).

Geiringer, Hilda: Une nouvelle méthode de statistique théorique (problèmes à deux dimensions). Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 157—165 (1935).

Geiringer, Hilda: Une nouvelle méthode de statistique théorique (problème à deux dimensions). II. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 307—324 (1935).

Die von Verf. schon in mehreren Publikationen entwickelte neue Methode zur Beurteilung von Wahrscheinlichkeitshypothesen (vgl. dies. Zbl. **8**, 265 und 368, sowie

ne demnächst in *Compositio Mathematica* erscheinende Abhandlung) wird nun auf zweidimensionale Verteilungen verallgemeinert. Insbesondere wird das zweidimensionale mexische Problem eingehend besprochen. Auch ein dreidimensionaler Spezialfall wird diskutiert.

A. Khintchine (Moskau).

Eyraud, H.: Correlazione e causalità. Giorn. Ist. Ital. Attuari **6**, 57—68 (1935). Es wird gezeigt, daß einige Korrelationsbeziehungen zwischen drei Ereignissen A , B , C , von denen B aus A und C aus B mit Notwendigkeit folgt, auch unter allgemeineren Voraussetzungen über die gegenseitige Abhängigkeit zwischen A , B und C bestehen bleiben. Den Inhalt der folgenden Abschnitte bilden schon früher vom Verf. veröffentlichte Untersuchungen (vgl. dies. Zbl. **10**, 313). *A. Khintchine* (Moskau).

Dieulefait, Carlos E.: Sur la corrélation au sens des modes. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1511—1513 (1935).

The author points out that the concept of correlation for a frequency function of two independent variables is based upon the arithmetic means of columns or of rows. From the biometric point of view, the typical values or modes of the columns may be of chief interest. While mode and mean coincide for the classical Laplace-Gauss distributions such is not the case in general. An approximate development exhibiting product moments through those of the fourth order is found for the general frequency surface. The curve of modes for y on x is computed using this approximate formula, and thence a coefficient for correlation in the sense of modes is obtained. Finally a coefficient of correlation in both senses is found whose vanishing implies absence of correlation in the sense of means and also of modes.

Albert A. Bennett (Providence).

● **Frisch, Ragnar: Statistical confluence analysis by means of complete regression systems.** (Univ. økonomiske inst., Publ. Nr. 5.) Oslo: Univ. økonomiske inst. 1934. 92 S.

It is a fact, which the author of this book called attention to in his paper, "Correlation and Scatter in Statistical Variables", in the *Nordic Statistical Journal* **1928**, that in a linear regression analysis, indeterminate and meaningless results may be reached when there exist subsets of the variables considered which satisfy linear relations among themselves. The present work is devoted to the exposition of methods studied and developed by the author for the analysis of the complex of linear relationships in a set of variables, which he terms confluence analysis, in order to pick out those which appear significant and to exclude those which do not. — In the first part of the book certain methods are considered, which, though useful, do not seem in themselves adequate. Included among these is a study of the correlation determinants, called scatterances, for the set of variables and its subsets. Another is the determination of the characteristic roots of the correlation determinants, which are proportional to the length of the principal axes of the correlation ellipsoid. Again one may study the spread of the regression coefficients for different directions of minimalization of the deviations from the regression plane or one may scrutinize the spread of the normals to the various regression planes obtained. — In part two the situation is studied under the assumption that the observed variates are linear combinations of elementary errors, independent or nearly so. Components present in two or more variables contribute to systematic variation, the others are disturbances. — In part three, gathering up ideas from the preceding sections, the author presents the technique he believes the most effective so far devised in confluence analysis. First, though, he presents the systematic "tilling" process he has developed for calculating the elements of the adjoints of all possible subsets of the correlation matrix. Then having found the regression coefficients for each pair of variables for all the subsets of the set of variables in which they occur for the minimalization directions given by the coordinate axes of the variables that are present in the subset, he explains the preparation of a "bunch map", a very interesting graphical device. In those cases in which linear regression methods are suitable, a study of the corresponding bunch map seems to be a powerful tool in picking out the sets of variables which have significant linear connections, in excluding extraneous variables, in judging the weight of the significant variables, and in detecting multicollinear situations. — Quite adequate numerical examples are included. The amount of computation required to carry out a bunch analysis is quite extended but it seems likely that no equally thorough analysis could be carried out with much less. The author has used much ingenuity in systematizing and reducing the labor involved. It is the opinion of the reviewer that the book represents an important contribution to regression analysis.

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

Welch, B. L.: Some problems in the analysis of regression among k samples of two variables. *Biometrika* 27, 145—160 (1935).

The author considers a system of N observations falling naturally into k groups within each group the regression of y on x being linear. Each group is viewed as a sample of a corresponding population concerning which it is assumed (A) that the y -deviation is normally distributed. Further hypotheses entertained are respectively (B) that the standard y -deviation is the same for all k populations, (C) that the slopes of the regression lines are the same for the several populations, (D) that the means of the populations coincide. Various combinations of these hypotheses are examined, (C) and (D) being tested only when (B) is found acceptable. The study is based upon the Neyman-Pearson likelihood test (see this Zbl. 4, 157), using here $L = \lambda^{2/N}$ rather than the coefficient of likelihood, λ , itself. Formulas for L are obtained for several types of hypotheses, namely for H , where A defines the major admissible set Ω , and A, B, C, D together identify the subclass, ω ; for H_1 , when Ω is as before and A, B characterize ω ; for H_2 characterized by hypothesis B , and falling into five distinguished subcases. The methods are applied to a numerical study of the data given by B. H. Wilsdon, Supp. J. Roy. Stat. Soc. 1, 180, concerning tests on crushing strengths of dry mortar and normal concrete for various ages using both the 5% and the 1% level of probability.

Albert A. Bennett (Providence).

Kołodziejczyk, Stanisław: On an important class of statistical hypotheses. *Biometrika* 27, 161—190 (1935).

The author treats a general problem, important special cases of which have been handled by A. A. Markoff, "Student", R. A. Fisher, J. Neyman and E. S. Pearson and K. Iwaskiewicz. He assumes n independent variates each following a normal law of frequency, the standard deviation being the same for each variate. The mean values of the variates are linearly related to s ($s < n$) unknown parameters. The statistical hypothesis that r known linear and independent functions of these parameters have assigned values is tested. Explicit formulas are obtained as solutions for each of two methods of approach, the Neyman-Pearson method of likelihood (mentioned in the previous abstract) and that of the best critical region (also due to these writers) (this Zbl. 6, 268). The latter method is shown to be indecisive for $r > 1$. For $r = 1$, the best critical region not only exists for a given alternative but is common to the whole class of alternatives considered and could not be bettered even if the probability law a priori of all unknown parameters were known. No numerical applications are made. The 14 references to related literature, and the detailed exposition of special cases previously treated independently, render clear the setting of the discussion. A. Bennett.

Pearson, Karl: Thoughts suggested by the papers of Messrs Welch and Kołodziejczyk (*Biometrika*, Vol. XXVII, pp. 145—190). *Biometrika* 27, 227—259 (1935).

The author examines critically the hypotheses involved in the papers treated in the two preceding abstracts. He infers that if in each of the k populations, the distribution of y for a given x is normal and homoscedastic the frequency surface must be of the form, $z_i = \Phi_i(x) e^{-(y - \bar{y}_i - \bar{\rho}_i x)^2 / 2\bar{\sigma}_{a,i}^2}$, where $\Phi_i(x)$ remains unspecified. The further condition that $\bar{\sigma}_{a,i}^2$ is to be independent of i leads to conclusions that appear "artificial not to say fantastic" save under one or the other of two further alternative suppositions, which on examination suggest restrictions apparently not envisaged by the authors mentioned, and lead by more elementary means to more decisive conclusions. A detailed numerical analysis is made of the data used by Welch, employing throughout the tables of the incomplete gamma-function, and conclusions are obtained somewhat at variance with those of that writer. The figures in some cases to fifteen significant digits, are listed with a completeness intended to give some comparative hint as to the extent of the computational details involved. The smallness of the sample treated seems to the author to militate against the authority of any conclusions as to the algebraical forms of the populations sampled.

Albert A. Bennett (Providence).

Jacob, M.: Zur Berechnung von Versicherungswerten bei Änderung der Rechnungs-
emente. *Assekuranz-Jb.* **54**, 56—64 (1935).

Cultrera, Raffaele: Intorno ad una speciale tavola di mortalità. *Atti Ist. naz. Assi-
uraz.* **7**, 53—60 (1935).

Smolensky, Pietro: Sull'importanza delle tavole di selezione fra le basi tecniche
ell'assicurazione sulla vita. *Atti Ist. naz. Assicuraz.* **7**, 61—88 (1935).

Bodoni, G., e P. Crosato: Sulla possibilità di sostituire, nel calcolo del totale dei
emi e delle riserve, ad una tavola selezionata una tavola aggregata oppure una tavola
ompatta. *Atti Ist. naz. Assicuraz.* **7**, 89—110 (1935).

Peter, Hans: Aufgaben und Grenzen der mathematischen Nationalökonomie. *Arch.
ath. Wirtsch.- u. Sozialforschg* **1**, 1—16 (1935).

Geometrie.

Rössler, Karel: *Géométrie abstraite mécanisée*. Publ. Fac. Sci. Univ. Charles
rague Nr **134**, 1—29 (1934).

Nach logistischer Formalisierung der Hilbertschen Axiome I—III für die absolute
Geometrie werden die grundlegenden Sätze dieser Geometrie mit Hilfe eines Funktionen-
alkuls (vgl. dies. Zbl. **11**, 3; Referat zu Rössler, § 1) hergeleitet. (Irrtum auf S. 12,
eile 5 v. u.) *Arnold Schmidt* (Göttingen).

Dingler, Hugo: Nochmals „H. Helmholtz und die Grundlagen der Geometrie“. *Physik* **94**, 674—676 (1935).

Berichtigung und ergänzende Präzisierung zu der dies. Zbl. **9**, 365 referierten
arbeit des Verf. *K. Reidemeister* (Marburg, Lahn).

Toepken, Heinrich: Über die Bestimmung eines reellen Dreiecks aus nur zwei
Stücken. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* **45**, 41—49 (1935).

Bekanntlich gibt es mehrere Beispiele, woraus hervorgeht, daß unter Umständen
wei Stücke ausreichen, um ein Dreieck zu bestimmen. Verf. gibt eine systematische
Behandlung dieser Frage. Es zeigt sich, daß früher gegebene Erklärungen dieser para-
loxalen Erscheinung, welche den Grund in der Beschränkung auf reelle Lösungen
u finden glaubten, nicht stichhaltig sind. Die Forderung, ein reelles Dreieck sei schon
durch zwei Stücke bestimmt, gibt selbst zu Bedingungsgleichungen Anlaß. Die zwei
Stücke bestimmen dann auch niemals ein beliebiges Dreieck; die überhaupt möglichen
Dreiecke bilden eine von vornherein bestimmbare Mannigfaltigkeit. Der Verf. bildet
die Gesamtheit der Dreiecke auf einem Teil des Raumes ab, indem er die Seiten a, b, c
als Punktkoordinaten auffaßt und präzisiert so, was unter einem „Stück“ und unter
„bestimmen“ zu verstehen ist. Sind $x(abc)$ und $y(abc)$ zwei Funktionen derart, daß
das Dreieck $a_0b_0c_0$ bestimmt ist durch die zwei Bedingungen $x = x_0, y = y_0$, dann ist
dafür notwendig, daß alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \end{vmatrix}$$

in Punkte $a_0b_0c_0$ verschwinden. Es wird auch eine hinreichende Bedingung angegeben
und die Frage wird mit der nach den Extremwerten von x und y in Verbindung gesetzt.
Auch wird der Fall behandelt, daß ein einziges Stück schon das Dreieck bestimmt.
Die allgemeine Theorie wird dann auf Beispiele angewandt. *O. Bottema*.

Bottema, O.: Über pythagoreische Tetraeder. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* **45**,
53—56 (1935).

Eine räumliche dreikantige Ecke sei vorgegeben. Gesucht wird der Ort aller
Ebenen, die von ihr ein pythagoreisches Tetraeder abschneiden. (D. h. die Inhalte
der Begrenzungsrechtecke sollen der Beziehung: $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$ genügen. Vgl.

F. Buschmann, dies. Zbl. 8, 270.) Eine Ebene mit der verlangten Eigenschaft muß zu einer Tangentialebene des quadratischen Kegels parallel sein, welcher die Seitenebenen der Ecke in den Projektionen der gegenüberliegenden Kanten berührt. Diskussion der Sonderfälle. *E. A. Weiss (Bonn).*

Clemow, J.: The harmonic conics. *Math. Gaz.* 19, 98—101 (1935).

Well-known theorems on the harmonic envelope and the harmonic locus of two conics.

O. Bottema (Sappemeer [Niederlande]).

Kárteszi, Ferenc: Intorno a certi cieli di n punti su di un'ellisse. *Boll. Un. Mat. Ital.* 14, 83—86 (1935).

Es wird die Anzahl der Punktzykel $P_1 = P_{n+1}, P_2, \dots, P_n$ einer Ellipse mit der Eigenschaft gesucht, daß der Krümmungskreis durch P_i im Punkte P_{i+1} schneidet. Diese Aufgabe wird mittels einer Bemerkung von Joachimsthal [Crelles J. 36, 99 (1848)] auf die andere zurückgeführt, n verschiedene komplexe Zahlen z_i mit $|z_i| = 1$ derart zu finden, daß $z_2 = z_1^{-3}, z_3 = z_2^{-3}, \dots, z_1 = z_n^{-3}$. Diese Zahlen sind Wurzeln der Gleichung $z^{(-3)^n} = z$, ohne gleichzeitig einer Gleichung $z^{(-3)^m} = z$ mit $m < n$ zu genügen. Die Bestimmung der Anzahl dieser Wurzeln ist in der allgemeineren Aufgabe enthalten, die Anzahl $N(k, n)$ der Wurzeln von $z^{k^n-1} = 1$ zu finden, die nicht einer Gleichung $z^{k^m-1} = 1$ mit $m < n$ genügen. Für diese Anzahl wird eine Formel angegeben. *E. A. Weiss (Bonn).*

Andreoli, Giulio: Sulla geometria piana Cayleyana e sulle metriche a forma quadratica indefinita. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend.*, IV. s. 4, 197—199 (1935).

Peters, H.: Verallgemeinerung eines Studyschen Satzes aus der komplexen Geometrie. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 45, 62—65 (1935).

Mehrdimensionale Verallgemeinerung eines für die komplexe Ebene von E. Study [Math. Ann. 60, 347 (1905)] angegebenen Satzes. Die Verallgemeinerung lautet im R_3 . Jeden von 6 Punkten p_i allgemeiner Lage des komplexen R_3 spiegele man an der quaternären Kette durch die übrigen 5 Punkte. Der Spiegelpunkt von p_i heiße p'_i . Dann gehören die 6 Geraden $p_i p'_i$ einem Regulus an. *E. A. Weiss (Bonn).*

Lob, H.: The orthocentric simplex in space of three and higher dimensions. *Math. Gaz.* 19, 102—108 (1935).

Für orthozentrische Simplexe — solche, die einen Höhenschnittpunkt besitzen — lassen sich viele Dreieckssätze leicht mehrdimensional verallgemeinern. Mit Hilfe der Vektorrechnung werden hier Analogien zu Sätzen über Inkreis, Umkreis, Eulerscher Kreis, Gerade, Neun-Punkte-Kreis, Fußpunktkreis, Simonsche Gerade und zum Satze von Gaskin (berührt ein Kegelschnitt die Seiten eines Dreiecks, so ist sein Direktorkreis zum Polarkreis des Dreiecks orthogonal) behandelt. *E. A. Weiss (Bonn).*

Carosella, Alberto: Sopra una nuova generazione della strofoide e relativa applicazione al problema della trisezione dell'angolo. *Period. Mat.*, IV. s. 15, 177—181 (1935).

Merlo, Giovanni: Geometria delle masse dei settori circolari. *Nuovo Cimento, N. s.* 12, 76—80 (1935).

The center of mass and center of oscillation of a uniform circular sector of radius R and central angle 2θ lie on the central line of the sector at distances $\frac{2}{3}R \frac{\sin\theta}{\theta}$ and $\frac{3}{4}R \frac{\theta}{\sin\theta}$, respectively, from the vertex of the sector. A simple geometric construction for the center of oscillation is given. The curve whose equation, in plane polar coordinates, is $r = \frac{3}{4}R \frac{\theta}{\sin\theta}$ is the quadratrix of Dinostratus. *Murnaghan.*

Auerbach, H., S. Mazur et S. Ulam: Sur une propriété caractéristique de l'ellipsoïde. *Mh. Math. Phys.* 42, 45—48 (1935).

Ein konvexer Körper des dreidimensionalen Raumes habe folgende Eigenschaft: Es gebe im Innern des Körpers einen Punkt O derart, daß alle durch ihn gehenden ebenen Schnitte untereinander affin sind. Dann ist der Körper ein Ellipsoid. — Aus

der Voraussetzung ergibt sich unmittelbar, daß entweder jeder oder kein Schnitt durch O eine Ellipse ist. Im ersten Fall folgt die Behauptung sehr einfach. Der zweite wird mit Hilfe des Satzes von der Nichtexistenz eines stetigen tangentialen Vektorfeldes auf der Kugel zum Widerspruch geführt. — Im obigen Satz ist als Spezialfall eine Kennzeichnung der Kugel von Süss [Tôhoku Math. J. **26**, 125—127 (1926)] enthalten.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Hirakawa, Junkô: On the relative breadth. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **7**, 137—144 (1935).

Unter der Relativbreite eines konvexen Bereichs bzw. Körpers in einer Richtung wird das Zweifache des Verhältnisses der entsprechenden gewöhnlichen Breiten des Bereichs (Körpers) und des Eichbereichs (Eichkörpers) verstanden. Es werden einige einfache Sätze über Bereiche und Körper konstanter Breite auf Bereiche und Körper konstanter Relativbreite übertragen.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Perkins, Fred W.: Sur les transformations ponctuelles qui conservent les distances. Bull. math. Fac. Sci. et grandes Écoles **1**, 243—246 (1935).

Mirguet, Jean: Sur la continuité du biparatingent. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 705—707 (1935).

Beweis, daß die Biparatingens eines Kontinuums I im dreidimensionalen Raum in einem Punkte $P \subset I$ stets ein Kontinuum von Ebenen bildet. (Biparatingens = Gesamtheit der Grenzlagen der Ebenen durch drei nicht kollineare Mengenpunkte, die unabhängig gegen P streben.)

W. Feller (Stockholm).

Differentialgeometrie:

Santaló, L. A.: Einige Eigenschaften sphärischer Kurven und eine charakteristische Eigenschaft der Kugel. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **10**, 9—12 (1935) [Spanisch].

Zwischen Krümmung κ und Torsion τ einer sphärischen Kurve besteht die Relation

$$\frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{\kappa^4} \left(\frac{d\kappa}{ds} \right)^2 \frac{1}{\tau^2} = R^2,$$

wo R der Kugelradius und s die Bogenlänge ist. Aus dieser Formel läßt sich neben anderen Eigenschaften der sphärischen Kurven entnehmen, daß die „Gesamtwindung“ $\int \tau ds$ einer geschlossenen sphärischen Kurve verschwindet, und daraus auf einem vom Ref. (dies. Zbl. **9**, 127) angegebenen Wege der Jacobische Satz über geschlossene Raumkurven. Ferner wird gezeigt: Verschwindet die Gesamtwindung einer jeden geschlossenen Kurve auf einer Fläche positiver Krümmung, so ist die Fläche eine Kugel. Dies wird auf den Satz zurückgeführt, daß eine Fläche mit lauter Nabelpunkten eine Kugel ist.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Boggio, Tommaso: Sul parallelismo di Levi-Civita per una superficie o varietà qualunque. Acta Pontif. Acad. Sci. Novi Lyncaei **88**, 159—162 (1935).

Einige die infinitesimale Parallelverschiebung eines Vektors, speziell auf der Kugelfläche, betreffende Formeln, die in einer Arbeit von Levi-Civita (vgl. dies. Zbl. **9**, 408) bewiesen und angewendet worden sind, werden hier einfach hergeleitet unter Zugrundelegung von Levi-Civitas ursprünglicher Definition der Parallelverschiebung mittels des umgebenden euklidischen Raumes.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Takasu, Tsurusaburo: Eine Ergänzung zur Kurventheorie im konformen Raume. II. Proc. Imp. Acad. Jap. **11**, 83—85 (1935).

Angabe der natürlichen Gleichungen der Kurven im konformen Raume (vgl. dies. Zbl. **11**, 80).

Heinrich Schatz (Innsbruck).

Takasu, Tsurusaburo: Eine Ergänzung zur Torsentheorie im Laguerreschen Raume. Proc. Imp. Acad. Jap. **11**, 86—89 (1935).

Angabe der drei natürlichen Gleichungen einer L -Torse im Laguerreschen Raume. [In der Arbeit ist im Schlußsatz nach der Formel (21) die Funktion $\Phi(t)$ einmal falsch bezeichnet.]

Heinrich Schatz (Innsbruck).

Tzitzéica, Georges: Sur quelques propriétés affines. C. R. Acad. Sci., Paris 200 1563—1565 (1935).

Es wird für eine beliebige Kurve im n -dimensionalen linearen Raum eine metrische Größe J bestimmt, die gegenüber der Gruppe der unimodularen, zentroaffinen Transformationen des Raumes invariant bleibt. Den Schluß bildet eine Anwendung auf ein Kurvennetz einer periodischen Laplaceschen Folge. *W. Haack* (Danzig).

Wileox, L. R.: Projective differential geometry of curves. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 273—275 (1935).

Si l'on fixe un point O ordinaire d'une courbe C qui appartienne à S_n , on connaît — d'après L. Berzolari [Ann. Mat. pura appl., 2 s. 26, 1 (1897)] — une n -pyramide projectivement liée au voisinage de O sur C , en rapportant C à laquelle on obtient une représentation canonique de ce voisinage. Dans les développements donnés à ce sujet par L. Berzolari (l. c.), le point unité des coordonnées projectives homogènes peut encore être choisi arbitrairement sur la courbe rationnelle normale du n -ième ordre osculatrice à C en O ; ici l'a. détermine une position pour ce point sur cette courbe avec un procédé géométrique intrinsèque valable pour $n \geq 4$. *B. Segre* (Bologna).

Buzano, Piero: Invariante proiettivo di una particolare coppia di elementi di superficie. Boll. Un. Mat. Ital. 14, 93—98 (1935).

Considérons dans l'espace ordinaire deux points P, P_1 appartenant respectivement à deux surfaces S, S_1 et distincts, et supposons que les plans π, π_1 tangents aux deux surfaces en P, P_1 se coupent précisément suivant la droite PP_1 . L'a. trouve qu'il y a un seul invariant projectif relatif aux voisinages du 2-ième ordre de P, P_1 sur S, S_1 , invariant que (en faisant abstraction d'un facteur numérique) est égal au produit des courbures totales de S, S_1 en P, P_1 par $\overline{PP_1}^4 : \sin^4(\pi \pi_1)$. Cette proposition doit être rapprochée à un résultat connu de E. Waelsch [S.-B. Akad. Wiss. Wien 100, 158 (1891); et C. R. Acad. Sci., Paris 118, 736 (1894)]. *B. Segre*.

Lane, E. P.: Plane sections through an asymptotic tangent of a surface. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 285—290 (1935).

E. Bompiani [Boll. Un. Mat. Ital. 5, 118 (1926)] a introduit plusieurs éléments géométriques, projectivement liés à un point O d'inflexion d'une courbe plane C . p. ex. il a considéré une cubique plane Γ déterminée par les conditions d'avoir un point de rebroussement et d'admettre avec C un contact du 6-ième ordre en O . Ici l'a. étudie les lieux engendrés par les éléments géométriques susdits, relatifs à un point O ordinaire et non parabolique d'une surface S donnée et aux ∞^1 courbes C qu'on obtient en coupant S avec les plans qui passent par une des deux tangentes asymptotiques de S en O . Ainsi, p. ex., le lieu des points de rebroussement des ∞^1 cubiques planes Γ qu'on a de la sorte, est une cubique gauche. *B. Segre*.

Calapso, R.: Alcune superficie di Guichard e loro trasformazione in superficie R. Boll. Un. Mat. Ital. 14, 78—83 (1935).

Guichardsche N -Fläche ist eine Fläche N , zu der eine Fläche N' existiert, die mit N gemeinsames sphärisches Bild der Krümmungslinien hat und so beschaffen ist, daß, wenn r_1, r_2 die Hauptkrümmungsradien von N und r'_1, r'_2 diejenigen von N' sind, die Gleichung $r_1 r'_2 + r_2 r'_1 = \text{Konst.} \neq 0$ besteht [S. C. Guichard, C. R. Acad. Sci., Paris 130, 159 (1900); P. Calapso, Ann. di Mat. (3) 11, 201 (1905)]. Den N -Flächen werden hier zuerst spezielle isotherme O -Netze im vierdimensionalen Raume zugeordnet; von diesen Netzen wird dann nach einer Methode des Verf. [Riduzione della deformazione proiettiva etc., Atti Accad. naz. Lincei, Rend. (6) 7, (1928)] zu speziellen R -Flächen übergegangen. *Čech* (Brno).

Finikoff, S.: Sur les couples de surfaces dont les tangentes asymptotiques aux points homologues concourent. Atti Accad. Sci. Torino 70, 212—219 (1935).

Darstellung der in der Note Couples de surfaces etc. (dies. Zbl. 11, 131) angezeigten Ergebnisse. *Čech* (Brno).

Cohn-Vossen, Stefan: Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen. Compositio Math. 2, 69—133 (1935).

Für die in einer früheren Note (dies. Zbl. 8, 30) angekündigten und für weitere Sätze, welche Beziehungen zwischen *Curvatura integra* und Eulerscher Charakteristik von offenen Flächen herstellen, werden nun Beweise mitgeteilt, die auf den folgenden Überlegungen beruhen. — Eine differentialgeometrische Fläche U wird als Fluchtgebiet bezeichnet, wenn sie einer offenen Kreisscheibe K , deren Mittelpunkt m entfernt ist, homöomorph ist und wenn eine Punktfolge auf U dann und nur dann unbeschränkt ist, wenn ihr in K eine gegen m konvergierende Folge entspricht. Eine Jordankurve auf U heißt ein Gürtel, wenn ihr in K eine Kurve entspricht, die m umschließt. Ist g die untere Grenze der Längen aller rektifizierbaren Gürtel von U , so heißt eine Folge von rektifizierbaren Gürteln Minimalfolge, wenn die Längen gegen g konvergieren. Es wird nun eine (zweifelloso auch für andere Fragen der Differentialgeometrie im großen bedeutungsvolle) Einteilung der Fluchtgebiete in „Schäfte“ und „Kelche“ vorgenommen. Ein Fluchtgebiet U heißt ein Schaft, wenn jede Minimalfolge auf U unbeschränkt ist (Beispiel: Rotationsfläche der Traktrix), sonst ein Kelch (Beispiele: geeignete Teile von Paraboloiden und Hyperboloiden). Ein Kelch heißt eigentlicher Kelch, wenn er keinen Schaft enthält. Jedes in einem Schaft enthaltene Fluchtgebiet ist selbst ein Schaft. Es wird gezeigt: 1. Auf einem Schaft gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Gürtel, der aus einem geodätischen Eineck mit einem Winkel besteht, der von π um höchstens ε abweicht. 2. Auf einem eigentlichen Kelch gibt es einen geodätisch-polygonalen Gürtel, dessen Ecken sämtlich gegen den unendlichen Teil des Kelches einspringend sind. Diese Gürtel werden als kürzeste derjenigen Gürtel gewonnen, deren Minimalabstände vom (geodätisch-polygonal angenommenen) Rand des betreffenden Fluchtbereichs in geeigneter Weise beschränkt sind. Es sei nun eine offene, vollständige differentialgeometrische Fläche F von endlicher Eulerscher Charakteristik χ gegeben. (Über den Begriff der vollständigen Fläche vgl. dies. Zbl. 2, 350, Hopf und Rinow.) Auf Grund bekannter topologischer Sätze läßt sich leicht einsehen, daß F in ein berandetes, beschränktes Flächenstück und endlich viele Fluchtgebiete zerlegt werden kann, und zwar überdies so, daß eine willkürlich vorgeschriebene beschränkte Teilmenge von F in dem berandeten Stück enthalten ist. Dieses Stück hat offenbar dieselbe Charakteristik χ wie F . In den endlich vielen Fluchtgebieten werden nun gemäß den obigen Sätzen 1. und 2. je ein Gürtel gewählt und die Gauß-Bonnettsche Formel auf das von diesen Gürteln begrenzte, beschränkte Flächenstück B angewendet. Dann ergibt sich für die *Curvatura integra* $C(B)$ der Wert $2\pi\chi$, vermindert um gewisse von den Rändern, also den gewählten Gürteln herrührende Ausdrücke. Diese sind bei eigentlichen Kelchen nach 2. stets positiv, bei einem Schaft nach 1. dem Betrage nach höchstens ε . Also hat man den im Referat dies. Zbl. 8, 30 genannten Hauptsatz. Insbesondere folgt durch Grenzübergang: Enthält eine vollständige Fläche der Charakteristik χ keinen eigentlichen Kelch, so ist ihre *Curvatura integra* gleich $2\pi\chi$. — Als Nebenresultate ergeben sich Sätze über die Existenz von geodätisch-konvexen Bereichen, die vorgeschriebene Mengen enthalten. — Zur Vorbereitung der oben angedeuteten Untersuchungen werden ab ovo und systematisch Sätze über Existenz und Verlauf von kürzesten Verbindungen auf Flächen und in geodätisch-polygonal begrenzten Flächenstücken entwickelt, die in dieser Allgemeinheit zum großen Teil neu sein dürften. Mit Rücksicht auf weitere Untersuchungen ist dieser Teil der Arbeit weiter ausgebaut worden, als für den vorliegenden Zweck erforderlich gewesen wäre.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Myers, Sumner Byron: Riemannian manifolds in the large. Duke math. J. 1, 39 bis 49 (1935).

Wenn man von den Untersuchungen über nichteuklidische Raumformen, also Riemannsche Räume spezieller Art absieht, ist die vorliegende Arbeit der erste Beitrag zur „Riemannschen Geometrie im Großen“ für mehr als zwei Dimensionen. Der

n -dimensionale Riemannsche Raum R_n sei vollständig; wie Hopf und Rinow (dies. Zbl. 2, 350) für $n = 2$ bewiesen haben, und wie es sich für beliebiges n ohne zusätzliche Schwierigkeit ergibt, kann man die Vollständigkeit Riemannscher Räume auf 4 formal verschiedene Arten definieren, ohne daß sich die Klasse der so definierten Räume faktisch ändert; eine dieser Definitionen fällt mit der seit Fréchet üblichen zusammen. Das allgemeinste Resultat (für das die vorausgesetzte Analytizität durch Stetigkeit der Ableitungen bis zur 3. Ordnung ersetzt werden kann) ist eine Verallgemeinerung eines Satzes über vollständige Flächen, der in der erwähnten Arbeit von Hopf und Rinow seine endgültige Formulierung gefunden hat, während der Beweis im wesentlichen älter ist. Der allgemeine Satz lautet: Ist die Gaußsche Krümmung jedes Flächenelementes des vollständigen R_n größer als eine positive Zahl a^2 , so ist R_n kompakt und hat einen Durchmesser $< \frac{\pi}{a}$. Gaußsche Krümmung eines Flächenelementes heißt die Gaußsche Krümmung der geodätischen Fläche, die von jenem Element ausgeht. Aus dem Satz folgt (was in der Arbeit nicht ausdrücklich hervorgehoben wird), daß auch jeder Überlagerungsraum von R_n kompakt ist, wodurch die topologischen Möglichkeiten für R_n weiter eingeschränkt werden; bei $n = 2$ bleibt bekanntlich nur die Kugelfläche und die projektive Ebene übrig. Der Beweis verläuft wie für $n = 2$ nach I. J. Schoenberg (dies. Zbl. 5, 299) hat unter den erwähnten Voraussetzungen über die Gaußsche Krümmung ein kürzester geodätischer Bogen stets eine Länge $< \frac{\pi}{a}$. —

In der Arbeit werden ferner die von W. Rinow (dies. Zbl. 4, 367) für $n = 2$ aufgestellten Sätze über Fortsetzung einer analytisch-differentialgeometrischen Umgebung zu einer vollständigen Mannigfaltigkeit auf beliebiges n übertragen. Nach Ansicht des Ref. wird auf S. 44 der Arbeit ein Satz von Severi falsch interpretiert, wodurch der Beweis von Theorem 3 hinfällig wird. Wahrscheinlich läßt sich der Beweis in Ordnung bringen. Eine Reihe von Sätzen der Arbeit beruht auf der Bemerkung, daß bei analytischer Metrik die Abstände aller konjugierten Punkte eines Punktes a einer geodätischen Linie (oder als Nullstellen einer analytischen Funktion schon gegeben sind, wenn man nur ein beliebig kleines, a enthaltendes Stück von G kennt. Dies erlaubt, folgenden Satz zu formulieren und einfach zu beweisen: Wenn ein analytisches n -dimensionales Raumelement derart gegeben ist, daß ein Punkt a desselben auf keiner durch ihn gehenden geodätischen Linie einen konjugierten Punkt besitzt, so läßt sich das Element zu einem vollständigen Raum fortsetzen, und dieser ist notwendig dem euklidischen n -dimensionalen Raum homöomorph. Ferner gilt: In einem vollständigen R_n mit offenem universellen Überlagerungsraum geht durch jeden Punkt a ein geodätischer Strahl, der keinen zu a konjugierten Punkt enthält.

Cohn-Vossen (Moskau).

Myers, Sumner Byron: Connections between differential geometry and topology. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 21, 225—227 (1935).

Durch einen Punkt p einer vollständigen differentialgeometrischen Fläche S (über diesen Begriff vgl. dies. Zbl. 2, 350, Hopf und Rinow, sowie 8, 30, Cohn-Vossen) seien alle geodätischen Linien gelegt und so weit beiderseits verlängert, wie sie die kürzeste Verbindung ihrer Punkte mit p liefern. Man erhält so in jeder Richtung von p aus entweder einen Strahl oder einen Bogen pq . Die Anzahl der kürzesten geodätischen Bögen, die q mit p verbinden (und natürlich alle gleichlang sind), heiße die Ordnung von q bezüglich p . Dann wird der Satz aufgestellt: Ist q von der Ordnung eins, so ist q zu p konjugiert, und zwar eine p zugewandte Spitze des geometrischen Orts der ersten zu p konjugierten Punkte r . Es wird dann ein Satz über das Kurvensystem r aufgestellt und aus ihm eine Reihe interessanter und neuartiger Sätze über den Ort q abgeleitet, wobei die Beweise später nachgetragen werden sollen. Ein Beispiel dieser Sätze: Die Fläche S sei geschlossen und mehrfach zusammenhängend. Dann ist der Ort q ein eindimensionaler Komplex, dessen zyklomatische Zahl gleich der Zusammenhangszahl mod 2 von S ist. S ist dann und nur dann orientierbar, wenn q bei monotonem

einmaliger Umdrehung der geodätischen Anfangsrichtung um p jeden Bogen jenes Komplexes genau zweimal, und zwar in entgegengesetzten Richtungen durchläuft. — Anm. d. Ref.: Dieser Satz dürfte eine interessante Formulierung gestatten, wenn man auf der universellen Überlagerungsfläche von S operiert; dann bedecken die Bögen pq alle und nur die Punkte, die von p nicht weiter entfernt sind als von irgendeinem p äquivalenten Punkt; man erhält also einen Fundamentalbereich, der eine in der Kristallographie übliche Konstruktion verallgemeinert (Dirichletsche Bereiche).

Cohn-Vossen (Moskau):

Morinaga, Kakutarô: An extension of the parallelism in X_n^{n-m} in X_n . J. Sci. Hiroshima Univ. A 4, 177—183 (1934).

In einer L_n sei eine X_n^m mittels $n - m$ kovarianten Tangentialvektoren t_λ ($e = m + 1, \dots, n$) gegeben. In der X_n^m soll die parallele Vektorübertragung durch folgende Bedingungen festgelegt werden: a) Sie soll in bezug auf dx^ν sowie auch in bezug auf den übertragenden Vektor v^ν linear homogen (und nicht gebrochen, Ref.) sein. b) Wenn ein — in L_n parallel übertragener — Vektor v^ν in X_n^m bleibt, so soll er auch als parallel in X_n^m übertragener Vektor angesehen werden. Aus diesen Bedingungen läßt sich die Übertragung konstruieren. Man bekommt einen Spezialfall der Bortolottischen Theorie (Ref.) [Bortolotti, Sulle varietà subordinate. Rend. Ist. Lombardo Sci., II. s. 64, 441—463 (1931); dies. Zbl. 2, 288], den der Verf. noch näher untersucht.

Hlavatý (Praha).

Takeno, Hyôitirô: On relative tensors. J. Sci. Hiroshima Univ. A 5, 31—41 (1934).

In Anlehnung an die Resultate von Schouten-Hlavatý [Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung. Math. Z. 30, 414—432 (1929)] werden hier als Pseudogrößen die skalaren und tensoriellen Dichten behandelt [vgl. Hlavatý, Théorie des densités dans le déplacement général. Ann. Mat., IV. s. 5, 73—83 (1927/28)], und zwar unter Voraussetzung, daß die Koeffizienten Γ_μ (s. die obengenannte Arbeit von Schouten-Hlavatý) nicht notwendig den $\Gamma_{\nu\mu}^\nu$ gleich sind. Daraus entspringen einige Sätze, von denen als Beispiel folgender zitiert werden soll: „Die allgemeinste Transformation der Konnexion $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu, \Gamma_\mu$, die die parallele Übertragung von vektoriellen Dichten des Gewichtes m in Ruhe läßt, ist

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\mu - \varphi_\mu, \quad \Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + m\varphi_\mu \delta_\lambda^\nu,$$

wo φ_λ ein beliebiger Vektor ist.“ Zu dieser Transformation wird auch der betreffende Weylsche „Krümmungstensor“ angegeben.

Hlavatý (Praha).

Golab, St.: Sur une condition nécessaire et suffisante afin qu'un espace de Finsler soit un espace riemannien. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 133—137 (1935).

In a previous note [Sur la mesure des aires dans les espaces de Finsler, C. R. Acad. Sci., Paris 200, 197—199 (1935); this Zbl. 10, 420] the author introduced a notion of area which is an invariant of the first order viz.

$$\Omega = \int_{(0)} F(x_1, x_2; -F_2, F_1) dx_1 dx_2.$$

This reduces to the classical form if the space is Riemannian. In the present note he proves that if F has derivatives with respect to p_1 and p_2 of as high as the third order and if Ω is independent of the congruence $p_i = p_i(\alpha_1, \alpha_2)$ then the space is necessarily Riemannian.

M. S. Knebelman (Princeton).

Golab, Stanislas: Les transformations par polaires réciproques dans la géométrie de Finsler. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1462—1464 (1935).

Let V_1 and V_2 be two vectors at a point P of a Finsler surface and let $x = x(t)$ $y = y(t)$ be a parametric representation of the indicatrix of P . Then the angle between the vectors — according to the Landsberg metric — is given by

$$\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{x'y'' - y'x''}{xy' - yx'}} dt.$$

It is shown in this note that this angle is unchanged by a transformation by reciprocal polars, that is, a local conformal representation may be established by means of this transformation.

M. S. Knebelman (Princeton).

Mechanik.

● **Le Roux, J.:** *Principes et méthodes de la mécanique invariante.* Paris: Gauthier-Villars 1935. VI, 112 pag. Frs. 20.—

The author starts from the requirement of Einstein that the laws of physics are to be expressed in a form valid for all arbitrarily moving systems of reference, but his theory is not in agreement with Einstein's relativity because he accepts an absolute simultaneity. The time is a parameter as in classical mechanics, and not one of the coordinates subject to transformation. In fact, the author accepts the Newtonian kinematics of rigid bodies, but with a generalisation. Instead of considering only the Euclidean group of transformations, he considers a general six-parameter group and bases his methods on the theory of Lie. Given a group of transformations from coordinates x_i to coordinates y_i

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1)$$

the a 's being parameters, the kinematical extension of the group consists of the transformations of x_i, dx_i to y_i, dy_i expressed by (1) and

$$dy_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_h \frac{\partial f_i}{\partial a_h} da_h.$$

His "group of relativity" is every group deduced from any initial group by kinematical extension, and the aim of invariant dynamics is the expression of the general laws of dynamics (in particular the law of gravitation) in a form invariant under the group of relativity, or equivalently, valid for any moving frame of reference. The kinetic energy T is not invariant under the group of relativity. But there exist principal frames of reference, forming a principal solid of reference, with respect to which T is a minimum (W). — On transformation back to a general frame of reference, W gives an invariant kinetic energy, and hence an invariant quadratic form $d\sigma^2$ which equals $\sum m ds^2$ when the frame is principal. When the group is Euclidean, the principal solid is such that with respect to it the linear and angular momenta vanish. Since the principal solid is invariantly defined, it is legitimate to assume the principle of least action with respect to it; when a general frame is employed this becomes

$$d \int \sqrt{2(U + h_0)} d\sigma = 0,$$

where h_0 is a constant and U an invariant force-function. In the application to gravitation certain hypotheses regarding the distribution and velocities of stars lead to the conclusion that the usual frame of reference of celestial mechanics (with the centre of gravity of the universe reduced to rest) is characterised by the property of minimum kinetic energy, and hence belongs to the principal solid of reference. The book gives a complete exposition of results previously developed by the author; see this Zbl. 8, 379 and references quoted there. J. L. Synge.

Horák, Z.: *Mécanique absolue et sa représentation dans l'espace-temps des configurations.* Prace mat.-fiz. 42, 59—107 (1935).

Using the kinematical line-element $ds^2 = a_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu = 2T dt^2$, some results (mostly known) are developed in the geometry of the motion of a scleronomic dynamical system. A theorem of least curvature for a system subject to constraint is given: the geometrical meaning of the "curvature" in question is rather obscure, and it appears to be assumed in the reasoning that the reactions of constraint are independent of the external forces [For another treatment, see Synge, Philos. Trans. Roy. Soc. London A 226, 51 (1926).] The greater part of the paper deals with rheonomic systems, the geometrical treatment being in the $(n+1)$ -space of coordinates and time. Formulae are sought which shall be invariant under general transformations of the $n+1$ variables, including transformations to non-holonomic or quasi-coordinates. An absolute force is constructed from the generalized forces X_λ and a component $X_t = -X_\lambda \dot{x}^\lambda$. For metric the author employs $d\sigma$, where

$$c^2 d\sigma^2 = a_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu + c^2(1 - 2\tau/c^2) dt^2,$$

c being a constant and τ the kinetic energy expressed as a function of t for an actual motion. The geometry therefore depends on the assignment of a congruence of trajectories (world-lines). A number of results are developed for these world-lines, including a

theorem of least curvature and a stationary principle $\int (c^2 \delta d\sigma + \delta P d\sigma) = 0$, where P is the virtual work of the absolute force.

J. L. Synge (Toronto).

Nagabhushanam, K.: On the form $\sum_{r=1}^n p_r dq^r - H dt$. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **1**, 555—561 (1935).

If x^i ($i = 1, 2, \dots, 2n + 1$) are arbitrary functions of coordinates, momenta and time for a conservative holonomic dynamical system with n degrees of freedom, Hamilton's principle may be expressed as $\delta \int X_i dx^i = 0$: the equations of the trajectories are then $a_{ik} dx^k = 0$, where $a_{ik} = \partial X_i / \partial x^k - \partial X_k / \partial x^i$. Starting with a Pfaffian form $X_i dx^i$ in $2n + 1$ variables of class $2n + 1$ (the class is the rank of the matrix a_{ik}, X_i), the author considers the converse problem, namely, the definition of time, the Hamiltonian and the Lagrangian. The argument is based on the idea of the class of a Pfaffian form. Taking for t any differentiable function of x^i which is not an integral of $a_{ik} dx^k = 0$, H is defined by the condition that $X_i dx^i + H dt$ shall be of class $2n$. The Lagrangian corresponding to an assigned time measure t is defined invariantly as $L = (X_i \xi^i) / (\xi^i \partial t / \partial x^i)$, where ξ^i is a vector in the direction of the trajectory.

J. L. Synge (Toronto).

Dubošin, G.: On the stability of solutions of canonical systems. C. R. Acad. Sci. URSS **1**, 273—276 u. franz. Text 276—279 (1935) [Russisch].

Verf. untersucht die Stabilität der Lösung $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ des kanonischen Systems $\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}$, $\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Die Funktion H soll dabei holomorph in den x_i und y_i sein und nur Potenzen zweiter und höherer Ordnung enthalten. Zuerst wird der Fall behandelt, wo t in H nicht explizite vorkommt. Ist H definit, so ist, wie bekannt, die Lösung stabil. Ist H indefinit, so können folgende Theoreme festgestellt werden: I. Ist es möglich, eine solche Funktion W der x_i und y_i zu bestimmen, daß $W + H$ definit wird und die Poissonklammern (W, H) ebenfalls definit, aber entgegengesetzten Zeichens wie $W + H$ oder identisch gleich Null werden, so ist die Bewegung stabil. II. Ist es möglich, eine solche Funktion W zu bestimmen, daß die Poissonklammern (W, H) definit werden und dabei $W + H$ entweder ebenfalls definit und gleichen Zeichens wie (W, H) oder indefinit wird, so ist die Bewegung labil. — Für den Fall, wo t in H explizite vorkommt, werden folgende Theoreme festgestellt:

I. Ist H definit und die partielle Ableitung $\frac{\partial H}{\partial t}$ ebenfalls definit und entgegengesetzten Zeichens wie H , so ist die Bewegung stabil. II. Ist es möglich, eine solche von t unabhängige Funktion W zu bestimmen, daß $W + H$ definit wird, dabei aber $(W, H) + \frac{\partial H}{\partial t}$ entweder identisch gleich Null oder ebenfalls definit, aber entgegengesetzten Zeichens wie $W + H$ wird, so ist die Bewegung stabil. III. Ist es möglich, eine solche von t unabhängige Funktion W zu finden, daß $(W, H) + \frac{\partial H}{\partial t}$ definit wird, die Funktion $W + H$ aber entweder indefinit oder definit und desselben Zeichens wie $(W, H) + \frac{\partial H}{\partial t}$ wird, so ist die Bewegung labil. Es werden Beispiele angegeben.

A. Andronoff. A. Witt (Moskau).

Merlo, Giovanni: Moto per inerzia dei sistemi piani. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **2**, 149—152 (1934).

This paper contains some interesting though essentially elementary remarks about the plane motion of rigid bodies subjected to restraints but acted upon by no work-producing forces.

D. C. Lewis (Princeton, N.J.).

Hagihara, Yusuke: On Hansen's coefficients in the expansions for elliptic motion. Proc. Imp. Acad. Jap. **11**, 93—95 (1935).

This paper is concerned with the expansion of the functions $\left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{\cos m\nu}{\sin m\nu}$ (where r is the radius vector in elliptic motion, ν is the true anomaly, a the semi-major axis,

and m and n are whole numbers) in terms of sines and cosines of multiples of the mean anomaly. These developments, which are required in Hansen's treatment of the perturbations of the minor planets, were studied by Tisserand (*Méc. céleste* I Ch. XV). The author here deduces them by a simpler procedure, depending on contour-integrals.

Whittaker (Edinburgh).

Watson, W. H.: Equations of motion for a general system of two particles. *Philos. Mag.*, VII. s. 19, 124—128 (1935).

An attempt to extend to a system of two charged particles the method of the author's paper *Trans. Roy. Soc. Canada* 28 (1934) (this *Zbl.* 10, 190). *Whittaker*.

Witmer, Enos E.: Fourier expansions on the classical theory of the motion of a rigid body under no forces, and their application in the Bohr theory of the asymmetrical rotator. *Philos. Mag.*, VII. s. 19, 325—340 (1935).

The solution of the classical problem of the motion of a rigid body about a fixed point under no external forces is obtained in a form suited for obtaining the Fourier expansions of the direction-cosines of a vector fixed in the moving body. These are required in the problem of obtaining selection rules and intensities for the asymmetrical rotator in Bohr's original quantum-theory.

Whittaker (Edinburgh).

Vint, J.: The bending of moderately thick circular plates. *Proc. London Math. Soc.* II. s. 39, 32—48 (1935).

Die Lösung der Spannungsgleichungen für eine Kreisplatte und eine Kreisringplatte mit beliebig vorgeschriebener zentralsymmetrischer Normalbelastung ihrer Ober- und Unterseite $z = \pm h$ wird konstruiert mit Benutzung der Lösungen der beiden folgenden Spezialfälle:

$$\text{I. } \sigma_z \equiv 0 \quad \text{und} \quad [\tau_{rz}]_{z=\pm h} = 0;$$

$$\text{II. } \sigma_z = \psi(z) \cdot I_0(kr) \quad \text{und} \quad [\tau_{rz}]_{z=\pm h} = 0.$$

Harry Schmidt (Köthen).

Hamel, Georg: Über das d'Alembertsche Paradoxon. (Abhandlungen zur Hydrodynamik. III.) *Z. angew. Math. Mech.* 15, 52—55 (1935).

Verf. stellt sich die Aufgabe, ebene Potentialströmungen um einen Kreis anzugeben, die außerhalb eines Winkelraumes der Hinterseite sich von der Dirichletströmung beliebig wenig unterscheiden, während innerhalb des Winkelraumes die Geschwindigkeit zwischen beliebig kleinen und großen Werten schwankt und keinen Grenzwert im Unendlichen besitzt. Es gelingt in sehr einfacher Weise solche Strömungen anzugeben und den Widerstand, den sie erzeugen, zu berechnen. Die Methode wird für anders geartete Störungsgebiete übertragen.

K. Friedrichs (Braunschweig).

Maruhn, Karl: Über die Verzweigung der Lösung einer Integro-Differentialgleichung aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. *Math. Z.* 40, 56 bis 69 (1935).

Der Verf. illustriert die allgemein von Lichtenstein begründete Verzweigungstheorie der Gleichgewichtsfiguren an einem Fall, wobei sich die Rechnungen relativ einfach gestalten, nämlich an der linearen Reihe von unendlichen homogenen Kreiszyklindern. Wird diese Schar auf die Winkelgeschwindigkeit ω als Parameter bezogen, so stellt sich die Existenz einer Folge von kritischen Werten $\omega = \omega_n$ heraus, bei welchen von der homogenen Kreiszyklinderschar unter anderem homogene Zylinder abzweigen, deren Querschnitt kein Kreis ist und eine mit n unbegrenzt wachsende Anzahl von Symmetrielinien aufweist. Daß dabei $\omega_n - \omega$ als Parameter der verzweigten Schar verwendet werden kann, wird wegen rechnerischen Komplikationen für hohe Werte von n nicht erledigt.

Wintner (Baltimore).

Quantentheorie.

Hirsch, R. von: Temperatur und Entropie der Lichtquanten. *Ann. Physik*, V. F. 22, 609—628 (1935).

Sevin, Émile: Sur le jeu des ondes, du spin et des nombres. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1744—1746 (1935).

Buhl, Adolphe: Sur l'intégrale de Stieltjes. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1710—1711 (1935).

Sehr formales Inbeziehungsetzen von gewissen Integralen mit wellenmechanischen Theorien, etwa im Sinne der Ausführungen in Bull. Sci. math., II. s. **58** (1934); dies. Zbl. **10**, 284. *W. Feller* (Stockholm).

Baudot, Marie-Antoinette: Sur les propriétés de l'espace $\Psi_{(2\omega)}$ et leurs applications. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1296—1299 (1935).

Es wird die Gibbsche Statistik in einem Hilbertraum und ihre Beziehung zur Quantenstatistik diskutiert. *O. Klein* (Stockholm).

Mimura, Yositaka, and Tutomu Maekawa: On the wave equation of photon. J. Sci. Hiroshima Univ. A **4**, 41—45 (1934).

Vergleichende Analyse verschiedener bisheriger Ansätze für die Wellengleichung des Lichtquants. *P. Jordan* (Rostock).

Mimura, Yositaka: Relativistic quantum mechanics and wave geometry. J. Sci. Hiroshima Univ. A **5**, 99—106 (1935).

Spekulationen in der Richtung einer Linearisierung der Formel $ds^2 = g_{kl} dx^k dx^l$ des Linielements zu $ds = \gamma_k dx^k$, mit $\gamma_k \gamma_l + \gamma_l \gamma_k = 2 g_{kl}$. *Jordan* (Rostock).

Steck, Max: Weitere Eigenschaften der Elektronenwellen. Z. Physik **94**, 489—495 (1935).

Es wird der Versuch gemacht, die de Broglie-Wellen als eine hochfrequente elektromagnetische Strahlung aufzufassen. *O. Klein* (Stockholm).

Kemmer, Nikolai: Über die elektromagnetische Masse des Diracelektrons. Ann. Physik, V. F. **22**, 674—712 (1935).

Es wird die Möglichkeit der Übertragung der in der klassischen Elektronentheorie üblichen Begründung einer elektromagnetischen Masse auf die Quantenelektrodynamik des Diracelektrons untersucht und festgestellt, daß die Existenz der Zustände negativer Energie den Gültigkeitsbereich dieser Übertragung sehr einengt. In den formal errechneten Ausdruck für die elektromagnetische Masse geht der Elektronenradius R mit der Potenz R^{-3} ein. Es wird erläutert, daß mit den üblicherweise betrachteten Selbstenergie- und -impulsgrößen wenig Zusammenhang besteht. Die Rechnungen werden in der „Löchertheorie“ wiederholt, und eine Diskussion zeigt, daß dort der elektromagnetischen Masse in einem viel weiteren Bereich Sinn zukommen dürfte; sie ist proportional mit $\log R$, ebenso wie Selbstenergie, Selbstimpuls usw. Die Einführung eines von null verschiedenen Elektronenradius in die Quantenelektrodynamik wird näher erörtert; dabei ist, wie bekannt, die Forderung relativistischer Invarianz nur im Grenzfall $R = 0$ erfüllt. *Weisskopf* (Zürich).

Goldstein, L.: Sur diverses grandeurs physiques de la théorie de Dirac. J. Physique Radium, VII. s. **6**, 78—88 (1935).

Es werden verschiedene beobachtbare und nichtbeobachtbare Größen für die stationären Zustände der wasserstoffähnlichen Atome nach der Diracschen Theorie berechnet und diskutiert. *O. Klein* (Stockholm).

Volkov, D. M.: Solution exacte de l'équation de Dirac pour une onde plane de fréquence déterminée. C. R. Acad. Sci. URSS **1**, 605—607 u. franz. Text 608—610 (1935) [Russisch].

Verf. findet eine exakte Lösung der Diracschen Wellengleichung für den Fall einer ebenen Welle bestimmter Frequenz. Die Lösung enthält drei willkürliche Parameter p_x, p_y, p_z , die im Falle eines verschwindenden Potentials die Bedeutung der Impulskomponenten haben [vgl. D. Volkov, Z. Physik **94**, 250 (1935); dies. Zbl. **11**, 185]. *V. Fock* (Leningrad).

Pollard, Ernest: Nuclear potential barriers: Experiment and theory. *Physic. Rev.*, II. s. 47, 611—620 (1935).

Aus den Ausbeuten bei den Zertrümmerungsexperimenten mit α -Teilchen ergibt sich mit Hilfe der Gamowschen Formel für die Durchlässigkeit von Potentialschwellen, daß die „Kernradien gegen α -Teilchen-Stoß“ und die Höhen der zugehörigen Potentialschwellen etwa mit der dritten Wurzel aus dem Atomgewicht wachsen. Einen parallelen Gang zeigt die Höhe des Resonanz-Eindringungs-Niveaus. Die Potentialschwellen gegen Protonen folgen keinem so einfachen Gesetz. Das könnte darauf beruhen, daß die Wechselwirkung eines Kerns mit einem α -Teilchen eine Kraft zweiter Ordnung (van der Waals-Kraft) ist, die schneller abfällt und weniger von individuellen Kerneigenschaften abhängt als die Kraft auf ein Proton. *C. F. v. Weizsäcker.*

Auwers, O. v.: Über den Stand der kreiselmagnetischen Forschung. *Naturwiss.* 23, 202—210 (1935).

Die kreiselmagnetischen Versuche sind einerseits prinzipiell eine unentbehrliche Stütze der Atomtheorie, andererseits werden sie immer mehr zu einem wichtigen Hilfsmittel atomphysikalischer Erforschung fester Stoffe, bei denen spektroskopische Erfahrung fehlt; sie erlauben nämlich eine unmittelbare Messung des Verhältnisses von magnetischem Moment der Atome zu ihrem mechanischen Impulsmoment, und das ist der aus der Theorie der Spektren bekannte Landésche Aufspaltungsfaktor g . Verf. gibt einen Überblick über die bisherigen Ergebnisse dieser g -Messungen. — Außer den beiden bekannten von Barnett einerseits, Einstein und de Haas andererseits entdeckten sind noch eine Anzahl weiterer kreiselmagnetischer Effekte denkbar, über die Verf. eine vollständige Übersicht entwickelt. Sie enthält 16 Fälle, von denen 8 als physikalisch möglich besprochen werden. Der verschiedentlich gefundene negative Ausfall eines dieser Versuche wird vom Verf. mit der von F. Bloch und R. Becker 1932 aufgestellten Theorie der ferromagnetischen Ummagnetisierung in schwachen Feldern („Wandverschiebung“) gedeutet. *E. Vogt (Marburg, Lahn).*

Bethe, H. A.: Ionization power of a neutrino with magnetic moment. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 31, 108—115 (1935).

Unter der Voraussetzung, daß das Neutrino ein magnetisches Moment besitzt, von der Größe n Bohrscher Magnetonen, wird sein Ionisationsvermögen und die Energieverteilung der ausgeschleuderten Elektronen berechnet. Unter der weiteren Annahme, daß seine Ruhemasse verschwindet, ergibt sich der Wirkungsquerschnitt Φ für die Ionisation eines Atoms zu $\Phi = \pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 n^2 \log \frac{mc^2}{A}$. Hierbei ist A das über die Elektronen des Atoms gemittelte Ionisierungspotential. *E. Teller (London).*

Hylleraas, Egil A.: Zur Konvergenzfrage gewisser Näherungslösungen der „äußeren“ Gleichung des Zweizentrenproblems. *Z. Physik* 93, 582—588 (1935).

Es wird bewiesen, daß das Verfahren, das der Verf. in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 2, 427) zur Berechnung der Eigenfunktionen des H_2^+ verwendet hat, trotz einem Einwand von G. Jaffé [*Z. Physik* 87, 535 (1934); dies. Zbl. 8, 283] konvergiert. Jaffé faßte das Verfahren als eine Potenzreihenentwicklung auf und wies darauf hin, daß diese nicht im ganzen physikalisch interessanten Wertbereich der unabhängigen Veränderlichen konvergiert. Verf. zeigt aber, daß die sukzessiven Näherungen nicht einem Aufsummieren einer Potenzreihe mit gegebenen Koeffizienten entsprechen. Es ändern sich vielmehr bei Einbeziehung höherer Potenzen jedesmal auch die Koeffizienten der niedrigeren Potenzen. Da dabei jede Näherungslösung eine möglichst gute Annäherung an die Eigenfunktion im ganzen physikalisch interessanten Wertbereich der unabhängigen Veränderlichen ergibt, ist das Verfahren als ein Variationsverfahren aufzufassen und als solches konvergent. *E. Teller (London).*

Gordon, A. R.: The calculation of the free energy of polyatomic molecules from spectroscopic data. II. *J. chem. Phys.* 3, 259—265 (1935).

Lotmar, W.: Zur Darstellung des Potentialverlaufs bei zweiatomigen Molekülen. *Z. Physik* **93**, 528—533 (1935).

Ein von Rosen und Morse angegebener [*Physic. Rev.* **42**, 210 (1932); dies. Zbl. **5**, 330] drei unabhängige Konstanten enthaltender Potentialansatz wird zur Darstellung der Potentialkurven zweiatomiger Moleküle benützt. Die verfügbaren Konstanten werden der Dissoziationsenergie, der Schwingungsfrequenz und der Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Schwingungsquantenzahl angepaßt. Man erhält daher die richtige Tiefe der Mulde und die richtige zweite und dritte Ableitung in der Gleichgewichtslage, während der gewöhnlich benützte Morsesche Ansatz [*Physic. Rev.* **34**, 57 (1929)] nur die Tiefe der Mulde und die zweite Ableitung richtig wiedergibt.
E. Teller (London).

Newing, R. A.: Note on the interrelation of the equilibrium nuclear distance with other molecular constants for diatomic molecules. *Philos. Mag.*, VII. s. **19**, 759—767 (1935).

Die von Morse eingeführte Energiefunktion zweiatomiger Moleküle wird verallgemeinert und der Zusammenhang zwischen dem Gleichgewichtsabstand der Kerne, der Schwingungsfrequenz nebst ihrer anharmonischen Korrektur und der Dissoziationsenergie untersucht.

R. de L. Kronig (Groningen).

Neugebauer, Th.: Zur Theorie der Ionenverfestigung. *Z. Physik* **94**, 655—661 (1935).

Verf. untersucht das Problem der Ionenverfestigung in heteropolaren Kristallen. Er kommt zu dem Schluß, daß die wichtigste Ursache für die Verfestigung das teilweise Überlappen der negativen Ladungswolken benachbarter Ionen ist. Hierdurch ist die Abschirmung der Kernladungen durch diese Ladungswolken nur eine unvollständige. Eine Abschätzung des genannten Einflusses ergibt für die Refraktionsverminderung in den Alkalihalogenidkristallen befriedigende Werte. *Kronig* (Groningen).

Kristallographie.

Boldyrew, A. K., und W. W. Doliwo-Dobrowsky: Klassifikation, Nomenklatur und Symbole der 32 kristallographischen Symmetriarten. *Ann. Inst. Mines Leningrad*, **145**—159 u. dtsh. Zusammenfassung 159 (1934) [Russisch].

Seitz, F.: A matrix-algebraic development of the crystallographic groups. II. *Z. Kristallogr. A* **90**, 289—313 (1935).

Es wird festgestellt, daß jede kristallographische Translationsgruppe invariant ist gegenüber der Transformation $x'_1 = -x_1$, $x'_2 = -x_2$, $x'_3 = -x_3$ (Inversion S_2). Deshalb werden unter den 32 kristallographischen endlichen Gruppen (kristallographischen Klassen) diejenigen 11 ausgewählt, in denen die Inversion als Element enthalten ist. Diese sind S_2 , C_2^h , V^h , C_4^h , D_4^h , S_6 , C_6^h , D_3^h , D_6^h , T^h , O^h . Für jede dieser 11 Gruppen werden durch Rechnen alle möglichen Translationsgitter — die 14 Bravaisgitter — ermittelt. Jede der elf Rechnungen besteht in kombiniertem Multiplizieren der erzeugenden dreireihigen Transformationsmatrizen mit dreigliedrigen Spalten, die die Translationen repräsentieren. Während der Rechnung stellt sich heraus, daß eine neuen Translationsgruppen herauskommen für D_4^h (gegenüber den schon bei C_4^h ermittelten), für C_6^h , D_3^h und D_6^h (gegenüber S_6) und für O^h (gegenüber T^h). (I. vgl. dies. Zbl. **9**, 384.)
Heesch (Göttingen).

Klassische Theorie der Elektrizität.

Lee, Y. W., Y. H. Ku und F. Hsu: The superposition of two simple-harmonic waves. *Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A* **3**, 65—75 (1935).

Záviška, Fr.: Elektromagnetische Wellen an einem Draht mit isolierender dielektrischer Hülle. *Mém. Soc. Roy. sci. Bohême* **1934**, Nr 3, 1—16 (1935).

Als Lösung der Maxwell'schen Feldgleichungen setzt Verf. in bekannter Weise Produkte an, welche aus einer Exponentialfunktion der Koordinate parallel zur Draht-

achse und einer Besselschen bzw. Hankelschen Funktion des Radius um die Drahtachse bestehen. Die Grenzbedingungen an den Grenzen: Draht — Dielektrikum, Dielektrikum — Luft sowie die Bedingung des Endlichseins der Lösung in der Drahtachse ergeben drei homogene lineare Gleichungen für die Koeffizienten in oben genanntem Ansatz, woraus dann eine transzendente Gleichung für die verschiedenen Fortpflanzungsgrößen entsteht (Dämpfungskoeffizient und Wellenlänge längs des Drahtes). Diese transzendente Gleichung wird vom Verf. für verschiedene Medien ausführlich betrachtet und numerisch gelöst. Er findet daraus, daß sich mehrere Wellenarten längs der Drahtachse fortpflanzen können, ähnlich wie Hondros und Debye es für einen dielektrischen Zylinder fanden. Im Anschluß an diese verschiedenen gefundenen Möglichkeiten betrachtet Verf., ebenfalls bis zur numerischen Auswertung, das Feldbild in einer Ebene durch die Drahtachse. *M. J. O. Strutt.*

Kalb, Robert M., and William R. Bennett: Ferromagnetic distortion of a two-frequency wave. Bell Syst. Techn. J. 14, 322—359 (1935).

Die Verff. lassen eine aus zwei sinusförmigen Schwingungen verschiedener und nichtkommensurabler Frequenz zusammengesetzte magnetomotorische Kraft auf ein mit Hysterese behaftetes ferromagnetisches Medium einwirken und untersuchen die hierdurch entstehende Induktion. Zunächst geben Verff. die von Madelung experimentell gefundenen Typen von Hysteresekurven an. Sie gehen von einem Ausdruck für die zweiwertige Hysteresisschleife aus, welche die Induktion als Funktion der magnetomotorischen Kraft darstellt durch ein lineares \pm ein quadratisches Glied. Für die magnetische Induktion setzen sie eine doppelte Fourierreihe an mit zunächst unbekannten Koeffizienten. Substitution dieser Fourierreihe in dem genannten analytischen Ausdruck ergibt die unbekannten Koeffizienten in Form vollständiger elliptischer Integrale erster und zweiter Gattung bzw. Summen und Differenzen hiervon. Bei der Berechnung unterscheiden sie 2 Fälle bezüglich der relativen Amplituden und Frequenzen der zwei die magnetomotorische Kraft bildenden Sinuskomponenten. Schließlich geben sie ihre Ergebnisse in Tabellen- und Kurvenform wieder. Die Berechnungsergebnisse werden mit gemessenen Kurven verglichen, wobei sich befriedigende Übereinstimmung ergibt.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Ionescu, Théodore, et Constantin Mihul: Propagation des ondes électriques dans le champ magnétique terrestre. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1301—1303 (1935).

Nach einer von den Verff. früher aufgestellten Theorie [C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1301, 1389 u. 1693 (1934); dies. Zbl. 10, 238; J. de Phys. 6, 35 (1935)] ist das Auftreten von Maxima und Minima bei der Reflexion elektromagnetischer Wellen auch unter Annahme nur einer einzigen ionisierten Schicht in der Atmosphäre erklärbar. Die theoretischen Ergebnisse sind nun, wie die Verff. zeigen können, auch bei Berücksichtigung des erdmagnetischen Feldes mit dem experimentellen Befund vereinbar.

J. N. Hummel (Berlin).

Alexander, J. W.: On non-periodic forces, acting on oscillatory systems. Physica 2, 273—285 (1935).

Verf. berechnet die Wirkung einer beliebig mit der Zeit verlaufenden elektromotorischen Kraft auf einen elektrischen Schwingungskreis mit Selbstinduktion, Kapazität und Widerstand. Das Ergebnis lautet: Es entsteht eine gedämpfte Schwingung von einer Frequenz und mit einem Dämpfungsfaktor gleich jenen des elektrischen Kreises und mit einer Amplitude gleich der Fourierkomponente der äußeren elektromotorischen Kraft von der Frequenz des Schwingungskreises. Er zeigt, daß die exakte Form der äußeren Kraft nicht in der Hauptsache obige Fourierkomponente bestimmt, sondern daß mehrere Klassen von Kräftefunktionen der Zeit ungefähr die gleiche Fourierkomponente besitzen und deshalb ungefähr dieselbe Erregung des elektrischen Kreises zur Folge haben. Zum Schluß betrachtet Verf. die Erregung, welche bei einer sinusförmig mit der Zeit verlaufenden äußeren Kraft entsteht, wobei insbesondere Kräfte endlicher Dauer in Betracht gezogen werden.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Müller, F.: Theorie des Magnetron-Röhrensenders mit geschlitzter Anode. Techn. Physics USSR 1, 509—528 (1935).

Müller, F.: Zur Theorie der in Magnetron-Röhrensendern auftretenden Elektronenschwingungen. Techn. Physics USSR 1, 529—538 (1935).

Bode, H. W.: A general theory of electric wave filters. Bell Syst. Techn. J. 14, 211—214 (1935).

Zusammenfassender Bericht über die gleichnamige Arbeit in J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 13, 275—362 (1934) (vgl. dies. Zbl. 10, 330).

Baerwald (Wembley).

Bode, H. W., and R. L. Dietzold: Ideal wave filters. Bell Syst. Techn. J. 14, 215 bis 252 (1935).

Im ersten Teil wird bewiesen, daß man die Annäherung an ein „ideales Filter“ mit den Eigenschaften: Dämpfung 0, Wellenwiderstand konstant und linearer Phasengang in Durchlaßgebieten, Dämpfung unendlich in Sperrgebieten, durch ein Netzwerk mit genügend vielen reaktiven Elementen beliebig weit treiben kann, falls man beliebig kleine, aber endliche „Übergangsgebiete“ festlegt, in denen keine Vorschriften gemacht werden (andernfalls würde eine Art Gibbssches Phänomen auftreten). Dieses Ergebnis ist gegenüber einem älteren Beweis von Cauer [Physics 2, 242 (1932); dies. Zbl. 4, 320], wo die lineare Phasenbedingung nicht eingeführt ist, neu (soweit es die Übertragungsfunktion betrifft). Das Beweisverfahren geht aus von einer Einteilung der die Übergangsfunktion bestimmenden Frequenzfaktoren in zwei Gruppen. Diejenigen der ersten Gruppe liegen im Durchlaßgebiet in gleichen Abständen, die der zweiten im Übergangsgebiet. Diese werden so bestimmt, daß sie die noch verbleibende Abweichung von den idealen Forderungen sowohl im Durchlaß- wie im Sperrgebiet klein machen wie ein Rest hoher Ordnung einer asymptotischen Entwicklung, welcher bei festem Übergangsgebiet durch Vermehrung der Anzahl der Faktoren der ersten und noch wirksamer durch die der zweiten Gruppe beliebig verkleinert werden kann. Die numerischen Verhältnisse dieser Näherung werden bis zur 5. Ordnung berechnet und im zweiten Teil der Arbeit, der Entwurfsbeispiele behandelt, angewendet. Wie zu erwarten, zeigt sich, daß bei endlicher Anzahl von Elementen diese numerischen Verhältnisse nicht die optimalen sind, aber ihnen um so näher liegen, je schärfer die Anforderungen an das Filter sind. Es wird gezeigt, wie man, je nach Verteilung dieser Ansprüche auf Dämpfung und Phasengang, am geschicktesten zu günstigster Dimensionierung gelangt. Im dritten Teil wird das neuartige Problem des Filters mit linearem Phasengang bis ins Dämpfungsgebiet hinein in Angriff genommen, welches besonders für Fernsehübertragungen von Bedeutung ist. Hier sind Dämpfungs- und Wellenwiderstandserzeugung nicht mehr unabhängig voneinander, da zur Verlängerung des linearen Phasengebietes die Reflexionswirkungen im Übergangsgebiet und Anfang des Sperrgebiets benutzt werden müssen. Das kommt auf eine Gleichintervallsverteilung der Wellenwiderstandsfaktoren, im ganzen auf eine symmetrische Anordnung um die theoretische Grenzfrequenz hinaus. Die Ausdehnung des linearen Phasengangs verschlechtert notwendig die Phasenqualität im Durchlaß-, und Dämpfungsqualität im Sperrgebiet. Die idealen Forderungen lassen sich jetzt nicht mehr gleichzeitig beliebig annähern, solange man dissipierende Elemente ausschließt. Bei Einführung endlicher aber mäßiger Dämpfungen lassen sich die numerischen Verhältnisse erheblich verbessern. Verff. erhoffen von einer allgemeinen Filtertheorie unter Einschluß aller drei Widerstandsarten eine entsprechende vollständige Lösung des Problems des idealen Filters mit erweitertem linearen Phasengang.

Baerwald (Wembley).

Haag, J.: Théorie mathématique des filtres mécaniques et électriques. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 607—609 (1935).

Ableitung der bekannten formalen Vierpolbeziehungen aus den Netzwerkgleichungen.

Baerwald (Wembley).

Haag, Jules: Sur la structure algébrique des admittances d'un filtre en fonction de la fréquence. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1169—1172 (1935).

Verf. bemüht sich, das allgemeine Reaktanztheorem (für n Polpaare) zu beweisen, was aber nur unvollständig gelingt. Die erfolgreiche Behandlung des Problems durch W. Cauer (vgl. dies. Zbl. **3**, 377; **9**, 423) scheint ihm nicht bekannt zu sein.

Baerwald (Wembley).

Dupouy, Gaston: Propriétés expérimentales des substances paramagnétiques. Caractères fondamentaux. Interprétation. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1308—1310 (1935).

Verf. interpretiert einige Eigenschaften der paramagnetischen Substanzen auf Grund der Annahme, daß diese Substanzen im allgemeinen zwei (oder mehrere) magnetisch einfache Bestandteile mit verschiedenen Werten der Konstanten θ und C der Weißschen Formel $\chi = C/(T - \theta)$ enthalten.

V. Fock (Leningrad).

Dupouy, Gaston: Constitution des corps paramagnétiques. Points de transformation. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1385—1387 (1935).

Verf. bespricht zwei Folgerungen aus seiner Annahme, daß eine magnetische Substanz ein Gemisch von zwei oder mehreren magnetisch einfachen Substanzen darstellt, die dem Weißschen Gesetz $\chi_i(T - \theta_i) = C_i$ ($i = 1, 2, \dots$) gehorchen (vgl. vorst. Ref.). 1. Die Temperatur T des Umwandlungspunktes beider Modifikationen ist durch die Relation $2/T = 1/\theta_1 + 1/\theta_2$ gegeben. 2. Wenn man annimmt, daß das magnetische Moment ein Vielfaches des Weißschen Magnetons ist, verhalten sich die Massen der beiden Komponenten wie ganze Zahlen.

V. Fock.

Sequenz, H.: Beiträge zur Gleichung der Hystereseschleife. Arch. Elektrotechn. **29**, 387—394 (1935).

Nach einem kurzen Überblick über die bisherigen Bemühungen um eine Gleichung für die Hystereseschleife werden ein paar neue Möglichkeiten angegeben, die Hystereseschleife in Gleichungsform darzustellen. Drei dieser Möglichkeiten beziehen sich auf Gleichungen in Polarkoordinaten. Hier kommt man bei Hystereseschleifen bei schwachen Feldern mit einer einzigen Gleichung aus; bei solchen bei starken Feldern werden zwei Gleichungen verwendet. Den Schluß bildet die Aufstellung einer Gleichung für die Hystereseschleife in rechtwinkligen Koordinaten.

Autoreferat.

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Dupont, Yvonne: La synthèse thermodynamique de Th. De Donder appliquée aux effets transversaux Nernst et Ettingshausen. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 390—395 (1935).

Stoner, Edmund C.: The thermodynamics of magnetization. Philos. Mag., VII. s. **19**, 565—588 (1935).

Verf. betrachtet ein magnetisierbares thermodynamisches System, das aus einer Komponente und einer Phase besteht und durch drei Zustandsgrößen (etwa Entropie, Volumen und magnetisches Moment) charakterisiert wird und gibt eine systematische Darstellung der auf dieses System bezüglichen Folgerungen aus den beiden Hauptsätzen der Thermodynamik.

V. Fock (Leningrad).

Schouls, Georgette: Application de la mécanique statistique à la thermodynamique des gaz. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 396—409 (1935).

Glaser, Walter: Zur Theorie des idealen Gases. Z. Physik **94**, 317—328 (1935).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Verteilungsfunktion der Energie in einem relativistischen Korpuskelgas so weit zu bestimmen, als sie durch die Gesetze der Erhaltung von Energie und Impuls, sowie durch die beiden Hauptsätze der Thermodynamik festgelegt ist. Als Vorbild dient die Plancksche Ableitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes. Es sei $n(\varepsilon) d\varepsilon$ die Zahl der Teilchen pro Volumeinheit mit den Energien aus dem Bereich ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$, ε_0 die Ruhenergie des Teilchens, $l(n, \varepsilon)$ die Entropiedichte, k eine konstante Größe von der Dimension der Boltzmannschen Konstante. Dann

können die Ergebnisse des Verf. in den beiden Formeln

$$l(n, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2} f\left(\frac{n(\varepsilon)}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}\right), \quad (1)$$

$$n(\varepsilon) d\varepsilon = \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2} \psi\left(\frac{\varepsilon}{kT} + \mu\right) d\varepsilon \quad (2)$$

zusammengefaßt werden, wo die von ε unabhängige Größe μ sich aus der Gesamtzahl der Teilchen bestimmt. *V. Fock (Leningrad).*

Fowler, R. H.: A statistical derivation of Langmuir's adsorption isotherm. Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 260—264 (1935).

Unter der Voraussetzung, daß ein Atom des Adsorbens nur ein Atom oder Molekül des Gases binden kann, wird unter Benutzung des von Fowler entwickelten allgemeinen statistischen Verfahrens die Langmuirsche Adsorptionsisotherme für folgende Fälle abgeleitet: 1. Für ein einheitliches Gas, das molekular adsorbiert wird. 2. Für ein zweiatomiges Gas X_2 , das atomar adsorbiert wird. 3. Für ein Gasgemisch, das molekular adsorbiert wird. Die Verallgemeinerung auf kompliziertere Systeme bietet keine Schwierigkeiten, doch dürfte ihrer Durchführung keine praktische Bedeutung zukommen, da die zugrunde gelegten Voraussetzungen den wirklichen Verhältnissen nicht genügend entsprechen. *E. Hückel (Stuttgart).*

Krutkow, G., und V. A. Dmitrijev: Zur Theorie der Brownschen Bewegung. Kleine Schwingungen eines Systems von n Freiheitsgraden. C. R. Acad. Sci. URSS **1**, 601—603 u. dtsch. Text 603—605 (1935) [Russisch].

Ce travail fait suite de trois notes de G. Krutkow (C. R. Acad. Sci. URSS **3**, 479, 215; **4**, 120; ce Zbl. **9**, 426; **10**, 235) sur les équations de mouvement avec les forces qui dépendent du hasard. — Les équations de mouvement sont traitées dans le cas où les mouvements sont infiniment petits; une expression asymptotique est donnée pour les coordonnées quand t augmente indéfiniment. *B. Hostinsky.*

Bell, R. P., and O. Gatty: The relation between molecular interaction and the thermodynamic properties of solutions. Philos. Mag., VII. s. **19**, 66—82 (1935).

Die Autoren führen für verdünnte Lösungen den Begriff der „Lösung ohne Wechselwirkung“ (non interaction solution) ein. Darunter ist eine (gedachte) Lösung zu verstehen, in welcher die Kräfte zwischen den Molekülen des Lösungsmittels dieselben sind wie im reinen Lösungsmittel, und in der keine Kräfte zwischen den Molekülen des Gelösten und denen des Lösungsmittels wirken. Es sollen vielmehr die Moleküle des Gelösten nur an den Gefäßwänden Kräfte erfahren. Für eine solche gedachte Lösung ist das chemische Potential des Gelösten dasselbe wie im Gas bei gleicher Temperatur und Volumkonzentration. — Das Maß für die Wechselwirkung in der wirklichen Lösung ist dann die Abweichung des chemischen Potentials des Gelösten in der Lösung von seinem entsprechenden Werte im Gas. Hierin gehen die Kräfte zwischen Gelöstem und Lösungsmittel und die Abänderung der Kräfte zwischen den Molekülen des Lösungsmittels durch das Gelöste ein, sowie — bei nicht genügend verdünnten Lösungen — die Kräfte zwischen den Molekülen des Gelösten untereinander. — Die Überführung von Gelöstem aus einer Lösung ohne Wechselwirkung in eine andere gleicher Konzentration, Temperatur und gleichen Druckes ist mit einer Energie- und Volumänderung verbunden. Diese Änderung rührt von der Änderung der Kräfte zwischen den Lösungsmittelmolekülen her, die in den beiden Lösungen durch die Überführung verursacht wird. Dieser Einfluß ist bisher, z. B. bei der Berechnung der Hydratationsenergien von Ionen, im allgemeinen nicht berücksichtigt worden. — Der Zusammenhang der Entwicklungen mit der allgemeinen Statistik wird kurz diskutiert und eine Berechnung der Abweichung des Verhaltens einer wirklichen Lösung von denjenigen der Lösungen ohne Wechselwirkung versucht unter Beschränkung auf die Kräfte, welche der Raumversperrung der Moleküle entsprechen. Sie läßt sich nur durchführen, wenn die Moleküle des Gelösten entweder sehr groß oder sehr klein gegen die des Lösungsmittels sind. *E. Hückel (Stuttgart).*

Rysselberghe, Pierre van: Theorems concerning the activity coefficients and osmotic coefficients of strong and weak electrolytes. *J. physic. Chem.* **39**, 403—414 (1935).

Verf. benutzt die bekannten thermodynamischen Methoden von Gibbs, welche kürzlich von Guggenheim und de Donder eine zusammenfassende Darstellung erfahren haben, zum Studium der thermodynamischen Eigenschaften elektrolytischer Lösungen. Je nachdem man diese als undissoziiert, vollständig und unvollständig dissoziiert auffaßt, resultieren drei korrespondierende Arten von osmotischen bzw. Aktivitätskoeffizienten, die bestimmte thermodynamische Relationen erfüllen. Für den Spezialfall sehr schwacher Elektrolyte und den Grenzfall sehr verdünnter elektrolytischer Lösungen werden diese Beziehungen sehr einfach. Ein Vergleich mit der bekannten G. N. Lewis-Randallschen Methode rechtfertigt im wesentlichen die letztere.

H. Falkenhagen (Köln).

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Bartels, J.: Random fluctuations, persistence, and quasi-persistence in geophysical and cosmical periodicities. *Terrestr. Magnet. Atmosph. Electr.* **40**, 1—60 (1935).

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem weniger mathematisch als logisch schwierigen Gebiet der Periodenforschung. Da auf diesem Gebiet leicht Unklarheiten vorkommen können und vorgekommen sind, wurden die Ausführungen recht klar und ausführlich gehalten. Im ersten Teil der Arbeit werden die Grundlagen der harmonischen Analyse in ihrer üblichen Form behandelt. Interessant ist hierbei ein neues zeichnerisches Verfahren zur Darstellung der Analyse in Vektorform, das darin besteht, diesen Endvektor als Summe von Einzelvektoren aufzufassen entsprechend einer Unterteilung des zur Verfügung stehenden Beobachtungsmaterials in verschiedenen Gruppen. Die folgenden Kapitel enthalten dann die Ableitung der statistischen Grundgesetze für die verschiedenen Erscheinungsformen des Beobachtungsmaterials: zufällige Verteilung, feste Perioden, annähernd feste Perioden. Bei diesen Untersuchungen ist besonders wichtig die klare Herausarbeitung der Zusammenhänge und Störungen der verschiedenen Erscheinungen untereinander. Für die hier wohl zum ersten Male eingeführte annähernd feste Periode wird ein mathematisches Kriterium gefunden. Im übrigen enthält die Arbeit eine Fülle neuer, kritischer Bemerkungen zum Gesamtgebiet der Periodenforschung. Auf manches oft unbeachtet gebliebene oder falsch gedeutete Problem wird hingewiesen. Den Schluß bildet eine klare Zusammenstellung der verschiedenen möglichen Fälle bei den Periodenuntersuchungen mit ihren statistischen Kriterien sowie eine Ableitung des mathematischen Rüstzeuges zur Ausführung der harmonischen Analyse.

G. Fanslau (Berlin).

Numerov, B. V.: On the problem of the determination of the geoid from gravity observations. *Russ. astron. J.* **12**, 47—54 u. engl. Zusammenfassung 55—59 (1935) [Russisch].

Bei einer gravimetrischen Bestimmung der Figur des Geoids müssen die Schweremessungen auf das Meeresniveau reduziert werden, was infolge der unregelmäßigen Massenverteilung in den oberen Erdschichten nicht genügend genau ausgeführt werden kann. Es wird vorgeschlagen, die Schweremessungen auf eine 500 m über dem Meere verlaufende Niveaufläche zu reduzieren, welche Fläche in den meisten Teilen der USSR außerhalb der anziehenden Massen verläuft. Der dabei nötige Vertikalgradient der Schwerkraft läßt sich in seinem anomalen Teile für eine ebene Erde mittels des

Integrals
$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty \frac{dl}{l^2} (\Delta g - \Delta g_0)$$
 berechnen, in welchem l, α die Polarkoordinaten eines Punktes mit der Schwerenanomalie Δg sind. Zur Integration nach l wird $\Delta g - \Delta g_0$ für die innere Zone von 0 bis l_0 durch eine Maclaurinsche Reihe dar-

gestellt, und für $l > l_0$ wird für das Integral eine Entwicklung nach Reihen von Fourier angewendet. Die gesuchte Reduktion der Schwerkraft auf die Höhe h wird

$$\Delta g = -h \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)_0 + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right)_0.$$

Eine Untersuchung dieser Formel zeigt, daß sie nur im Falle, wenn die Reduktionshöhe h kleiner als die Tiefe der Störungsmassen ist, gültig ist. *A. Michailov (Moskau).*

Hodgson, Ernest A.: Bibliography of seismology October, November, December, 1934. Publ. Dominion Observ. Ottawa 12, 67—94 (1935).

Meteorologie:

Christians, H.: Zur Dynamik der Cumuluswolke. Beitr. Physik frei. Atmosph. 22, 149—161 (1935).

Die mit Hilfe des Tephigramms oder analytisch aus der (durch instabile Schichtung und Kondensationswärme hervorgerufenen) Energiezunahme aufsteigender feuchter Luft bestimmbare Geschwindigkeitszunahme mit der Höhe ($\partial v / \partial z$) ermöglicht die Berechnung eines stationären axialsymmetrischen Stromlinienbildes (z = Achse), wobei die Kontinuitätsgleichung in der Form $4\pi r^2 v = 4\pi r_0^2 v_0$ als ausreichende Näherung (v statt v_z , Dichte nicht berücksichtigt!) angesehen wurde ($4\pi r^2$ = horiz. Stromröhrenquerschnitt, Index 0 kennzeichnet Kondensationshöhe z_0). — Eine Überschlagsrechnung ergibt die Energiedissipation durch innere Reibung von der Größenordnung 10^{-2} der zugeführten Energie. — Unter der Voraussetzung, daß im Kondensationsniveau der Rand der Kumuluswolke durch $\partial v_z / \partial z$ = Max. bestimmt ist, ergibt sich als Radius der Wolkenbasis $r_0 = \sqrt{2} v_0 / c [v_0^2 = (v_r^2 + v_z^2)_{z=z_0}]$, worin $c = \partial v / \partial z$ = konst. — Der Widerstand der Luftmassen oberhalb der aufsteigenden Wolke wird abgeschätzt und zur Erklärung der Kappenbildung herangezogen. *H. Ertel (Berlin).*

Malurkar, S. L.: A note on measurements of atmospheric radiation with restricted apertures. Gerlands Beitr. Geophys. 44, 127—128 (1935).

Im Anschluß an Untersuchungen von Roberts, Möller und Mügge wird ein Integralwert abgeleitet, der es gestattet mit Hilfe von aus Strahlungsmessungen gewonnenen Extinktionskoeffizienten den innerhalb einer Schicht vorhandenen Wasserdampf zu errechnen. *Hänsch (Hannover).*

Stüve, G., und R. Mügge: Energetik des Wetters. Beitr. Physik frei. Atmosph. 22, 206—248 (1935).

Einleitend weisen die Verff. auf die grundlegende Bedeutung der vertikalen, durch die langwellige Strahlung in Verbindung mit der Glashauswirkung der Lufthülle geschaffenen Temperaturgegensätze der Atmosphäre hin. Diese stellen sich ein durch die von der Gegenstrahlung erzeugte Erwärmung unten, und infolge der durch das Anwachsen der effektiven Ausstrahlung begünstigten Abkühlung der hohen Atmosphäre. Das im Mittel beobachtete Temperaturfeld kommt als Folge der allgemeinen Strahlungsbedingungen zustande. Infolge der dauernden Abkühlung der freien Atmosphäre kann sich nur durch fortgesetzte Umlagerungen ein dynamisches Gleichgewicht der troposphärischen Luftmassen herstellen, wobei sich neben der Advektion und der Konvektion auch die latente Kondensationsenergie an der Wärmenachlieferung in die freie Atmosphäre beteiligen kann. Im Mittel hält diese intensivere, örtlich beschränktere Wärmezufuhr dem dauernden, über großen Gebieten wirksamen, dem Betrag nach aber kleineren Wärmeentzug das Gleichgewicht. Das tropische, ungesteuerte Wetter ist dabei am reinsten durch die beiden angegebenen, sich gegenseitig kompensierenden Vorgänge bestimmt, die infolge der Bildung des stratosphärischen Kältehochs als energieaufbauend anzusprechen sind im Gegensatz zu den Wärmegewittern mit ihren stark feuchtablauen Konvektionsströmen, die man deshalb auch nicht zur Erklärung der substratosphärischen Abkühlung heranziehen kann. Zur weiteren Untersuchung ziehen die Verff. die von ihnen angegebene meridionale und vertikale Verteilung der Zirkulationsenergie $\int V p \times V \sigma d\mathfrak{S}$

heran. Eine Anhäufung von Zirkulationsenergie ergibt sich dabei in mittleren Breiten an der Stratosphärenengrenze, ihre breitenmäßig verschiedene Verteilung schafft die Vorbedingung für den horizontalen Austausch. Im Mittel steht dieser Zirkulationsenergie die gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete, aus der vertikalen Windverteilung herrührende entgegen, erst ihre Ungleichheit führt zu der „Störung“. Unter den gesteuerten Bewegungen unterscheiden die

Verff. grundsätzlich die „Bewegungssteuerung“, welche die unteren Druckgebilde zu einer Wanderung längs der oberen Isobaren zwingt und durch das quasistationäre Massengebiet erzeugt wird und die „Gleitsteuerung“, die aus den Störungen eben dieses Massengebietes hervorgeht und die anisobaren wetterwirksamen Vertikalbewegungen schafft. Die erstere führt zur Aufrichtung bzw. Verflachung der isentropen Flächen und damit zur Labilisierung bzw. zur Stabilisierung, sie hat also mit Bezug auf die Troposphäre eine energieverteilende, die Gleitsteuerung dagegen eine der Troposphäre energiezuführende Wirkung. Die allgemeine Dynamik unterscheidet daher zweckmäßig zwischen Bewegungen ohne und mit äußerer Energiezufuhr. Ihre Behandlung erstreckt sich auf das Ein- und Zweikörperproblem (Massenpunkt, Diskontinuität) und auf das Kontinuum sowie auf die Unterscheidung beschleunigter und unbeschleunigter Bewegung. Ohne Energiezufuhr ergeben sich im unbeschleunigten Falle das barische Windgesetz und die Margules'schen Grenzflächengleichungen, im beschleunigten dagegen stets horizontale und vertikale, wetterunwirksame und infolge der Reibung abklingende Trägheitsschwingungen. Die unbeschleunigten Bewegungen mit Energiezufuhr führen zwar zu Vertikalbewegungen, die aber, weil isobar, auch wetterunwirksam sind. Lediglich die beschleunigten Bewegungszustände mit Energiezufuhr ergeben die anisobaren, wetterwirksamen Vertikalbewegungen (Gleitsteuerung). Durch Einführung des zweiten individuellen

Differentialquotienten $\frac{d^2 Z}{dt^2}$ der Zirkulation Z gelangen die Verff. zum Begriff der Zirkulations-

leistung. Im wesentlichen ergeben sich dabei, trotz einiger Versehen in der mathematischen

Behandlung, drei Glieder, von denen das erste $\left(\frac{1}{p} \nabla p \times \frac{d}{dt} \nabla \vartheta\right) d\mathfrak{F}$ die thermodynamische

Gleitsteuerung bedingt, weil es durch die zeitliche Änderung des Gradienten der potentiellen Temperatur ϑ gekennzeichnet ist (ungleichmäßige Erwärmung, Umwandlung der Aufgleitfront in Einbruchsfrent). Die dynamische Gleitsteuerung wird bestimmt durch

$-\left(\frac{1}{p} \nabla \vartheta \times \nabla \frac{\partial}{\partial t} p\right) d\mathfrak{F}$ und $-\left\{\frac{1}{p} \nabla \vartheta \times (\nabla \nabla p)\right\} d\mathfrak{F}$. Das erste Glied zeigt die Verknüpfung

der Zirkulationsleistung mit den isallobarischen Gebilden, deren verschiedene Lage zum Temperaturfeld zu verschiedenen Typen führt, welche, jetzt schärfer präzisiert, bereits als Typus I und II in die Literatur eingegangen sind, das zweite dagegen den Zusammenhang mit der Divergenz des Isobarenfeldes. Im letzten Kapitel behandeln die Verff. die selbständigen ungesteuerten Systeme hohen und tiefen Druckes mittlerer Breiten (letzteres subpolarer Typ), deren Zustandekommen durch die gestörte Unterbindung der Konvektionswärmezufuhr und die dadurch ermöglichte Strahlungsabkühlung der hohen Atmosphäre erklärt wird (thermodynamisch-energetische Rückkoppelung). Schließlich wird im Zusammenhang damit gezeigt, daß der Mechanismus der Zyklogenese nicht nur die Veränderung des isobarischen Feldes in horizontaler Richtung, sondern in vertikaler auch die des isallobarischen mit umfaßt.

H. Philipps (Frankfurt a. M.).

Ertel, Hans, und Sjan-zi Li: Der Advektionsmechanismus der atmosphärischen Druckschwankungen. Z. Physik 94, 662—673 (1935).

Eine Arbeit von Rossby (Beitr. Physik frei. Atmosph. 13, 164; 14, 240) wird kritisiert, in der der Anteil der einzelnen Schichten in der Atmosphäre auf die Bodendruckänderung untersucht wird. In der Rossbyschen Arbeit war der Einfluß von Advektion und (adiabatischer) Zustandsänderung berücksichtigt worden, aber es war außer acht gelassen, daß, etwa bei Massenzuwachs, ein Einheitsvolumenelement einer Luftsäule nicht nur infolge des Massenzuwachses über diesem Element seine Lage verändert, sondern auch infolge der advektiven Dichteänderung in dem Element selbst. Die Verff. finden für die Beziehung zwischen der beobachteten Druckänderung δp in der Höhe z und dem advektiven Druckäquivalent $\delta \pi(z)$

$$\delta p = \delta \pi \left(1 - g \varrho / k \int_0^z \frac{dz}{p} \right),$$

wo g die Fallbeschleunigung, ϱ die Dichte, k das Verhältnis der spezifischen Wärmen ist. Während Rossbys Formel unverständlich hohe Werte für das Restglied (d. h. der Anteil an der Bodendruckänderung, der von Schichten herrührt, die über dem höchsten Beobachtungsniveau liegen) gab, gibt die neue Formel viel kleinere und daher plausible Werte dafür. Die Rechnungen sind unter Betrachtung adiabatischer Zustandsänderungen, wie üblich, durchgeführt.

B. Haurwitz (Cambridge, Mass.).